

Frontière Efficente - l'approche de Black Litterman

Daniel Herlemont

Table des matières

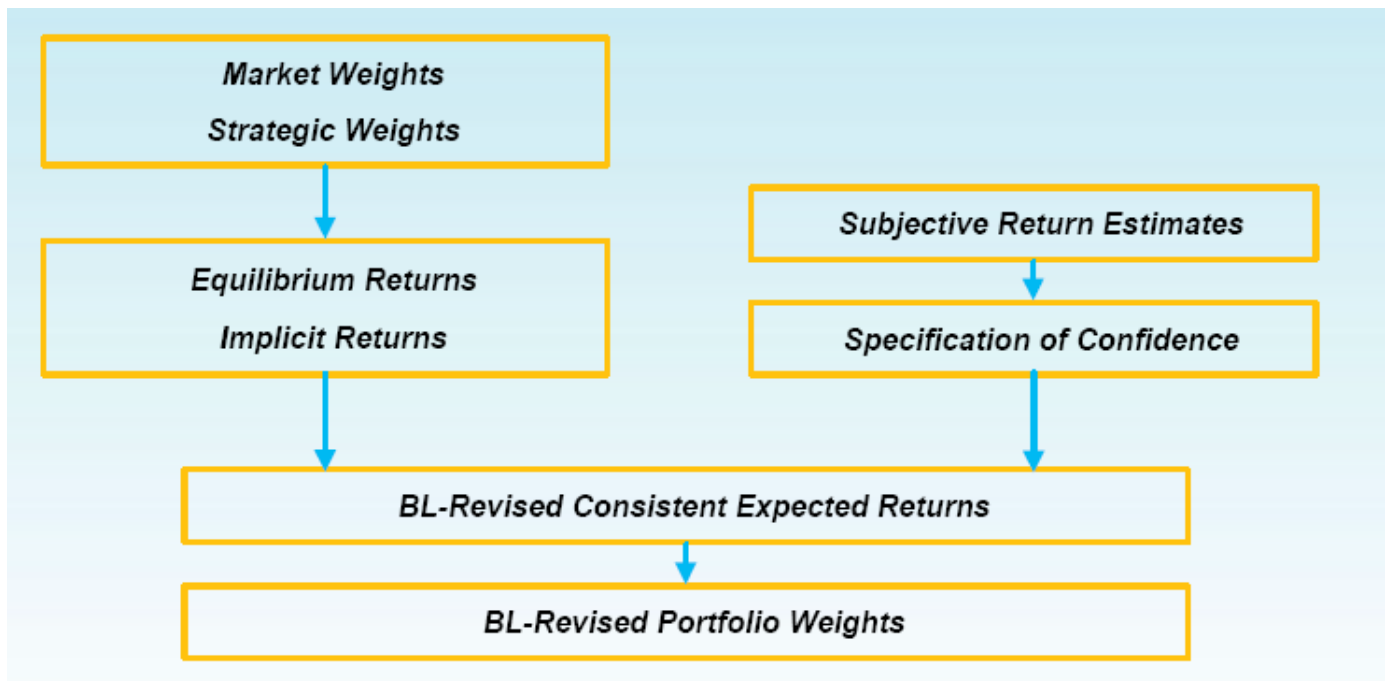
1 Objectifs et motivations	2
2 Les données	3
3 Frontière efficace et sensibilité aux rendements	3
4 Sensibilité aux rendements	4
5 Utilisation des rendements historiques	5
6 Optimisation avec contraintes	6
7 Pondérations d'équilibre	6
7.1 A partir des capitalisations	7
7.2 Prime de risque du marché	8
7.3 A partir des betas	8
8 L'approche de Black Litterman	8
9 Spécification des vues	10
10 Calibrations	13
11 Annexe	14
11.1 Caculs des solutions pour Black Litterman	14
11.2 Produit de variables aléatoires gaussiennes	16
12 References	17

1 Objectifs et motivations

L'approche traditionnelle d'optimisation de la frontière efficiente a de nombreux inconvénients. Elle nécessite l'utilisation de rendements espérés qui, comme on l'a vu précédemment, sont difficiles à estimer. Comme nous le verrons, l'optimisation naïve consistant à utiliser les rendements historiques conduit à des pondérations extrêmes. D'autre part, on pourra constater que les pondérations obtenues sont très sensibles aux variations des rendements. Enfin, l'approche traditionnelle ne tient pas compte des incertitudes (erreurs d'estimations par exemple).

L'approche de Black Litterman (BL) [1] est un moyen élégant et intuitif pour pallier les inconvénients de l'approche traditionnelle. L'approche BL permet de combiner les pondérations issues de l'équilibre du marché du CAPM avec les "vues" du gérant (du type tel secteur va surperformer tel autre secteur).

Nous procéderons par étapes, résumées sur la figure ci après :



L'objectif de ce TP est donc :

- mettre en évidence les inconvénients de l'approche naïve
- retrouver les rendements implicites et pondérations issues du CAPM.
- mettre en oeuvre l'approche de Black Litterman pour intégrer des "vues"

– montrer que les pondérations obtenues sont plus robustes et pertinentes.

Enfin, nous étudierons les sensibilités à différents paramètres du modèle (notamment les notions de "confiances" dans l'équilibre du marché ainsi que dans les "vues").

2 Les données

Les données sont celles décrites dans le [cours](#), reprenant les exemples de Zimmerman 2002 [6], chapitre 10.

Les données correspondent aux 18 indices européens sectoriels des indices du STOXX (<http://www.stoxx.com>)

Télécharger ces données à l'adresse : [efficient-frontier-black-litterman-data-tp-fr.xls](#)

Construire :

- la matrice de covariance Σ
- l'inverse de la matrice de covariance Σ^{-1}

3 Frontière efficiente et sensibilité aux rendements

Le portefeuille optimal est obtenu en recherchant la solution d'un problème d'optimisation quadratique (voir cours) :

$$\max_w w^T \Pi - \frac{1}{2} \gamma w^T \Sigma w \quad (1)$$

avec w les pondérations, Σ la matrice de covariance, γ l'aversion au risque et Π le vecteur des rendements espérés.

Sans contrainte sur les pondérations (ventes à découvert et emprunts autorisés), cette optimisation conduit à la solution suivante (voir cours) :

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \Pi \quad (2)$$

Notes :

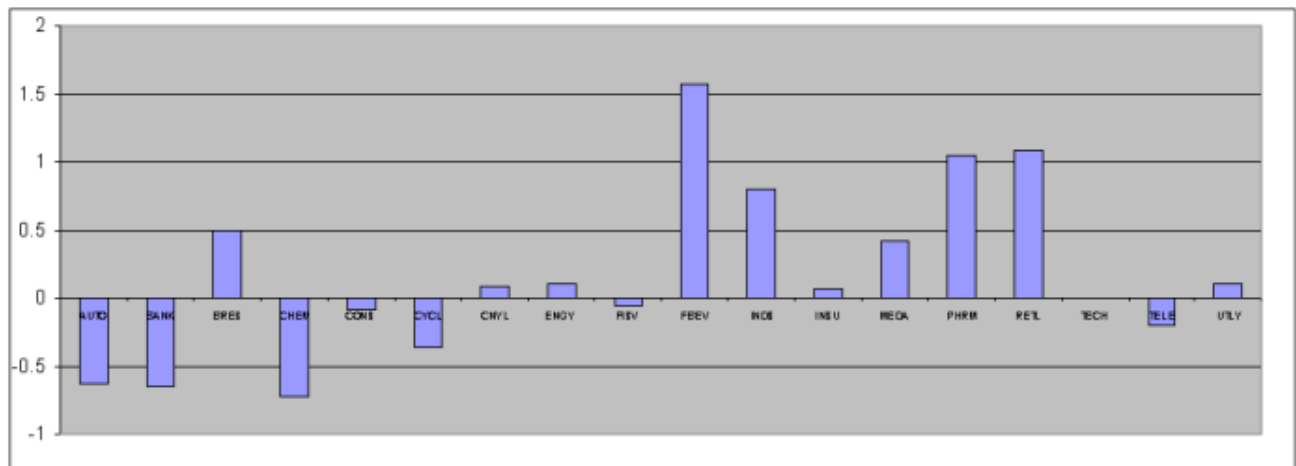
- $w_0 = \sum w_i$ représente la proportion investie dans l'actif sans risque. Il y a emprunt lorsque $w_0 < 0$.
- Π représente le vecteur des rendements en excès du rendement sans risque. Les rendements sont $\Pi' = \Pi + r_{free}$. Le programme d'optimisation peut s'écrire de manière équivalente :

$$\max_w w^T \Pi' + w_0 r_{free} - \frac{1}{2} \gamma w^T \Sigma w$$

avec $w_0 = 1 - \sum_{i=1,n} w_i$. Dans la suite les rendements sont des rendements en excès $\Pi' - r_{free}$.

Dans un premier temps, on considère des rendements espérés tous égaux, $\Pi_i = 0.13$ pour tout $i = 1, 18$. On prendra $\gamma = 3$, comme étant l'aversion au risque standard.

Calculer les pondérations du portefeuille optimal. On représentera ces pondérations sous la forme suivante :



Montrer que cette optimisation tend à produire des pondérations extrêmes avec des pondérations négatives (positions de ventes à découvert). Ces pondérations sont difficiles à justifier

On notera que les secteurs ayant les rendements les plus élevés ne sont pas nécessairement sur pondérés dans le portefeuille. Inversement, d'autres secteurs sont bien représentés alors que les rendements espérés ne sont pas les plus élevés :

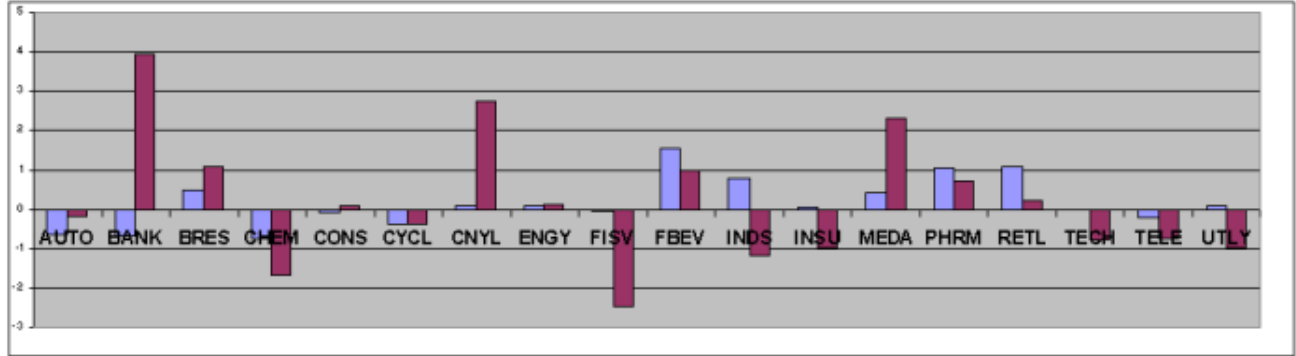
- identifier ces valeurs
- expliquer à l'aide de la matrice de corrélation.

4 Sensibilité aux rendements

Etudier l'impact des modifications des rendements. Par exemple, on représentera le portefeuille optimal pour un accroissement des rendements espérés de +5% pour les secteurs BANK, CNYL, MEDA.

Superposer avec les pondérations précédentes :

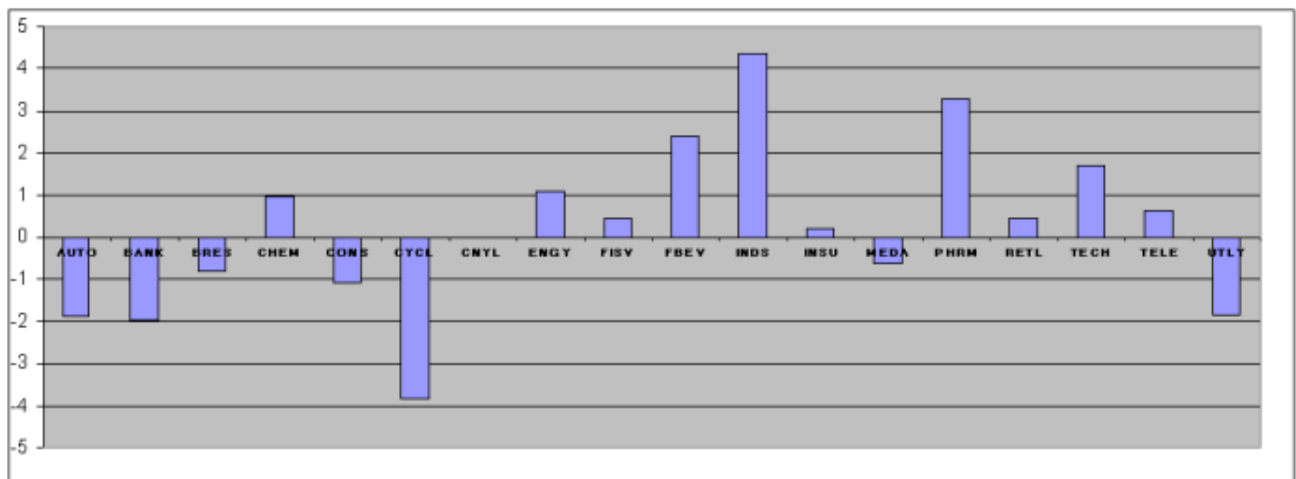
5 UTILISATION DES RENDEMENTS HISTORIQUES



Commenter les résultats.

5 Utilisation des rendements historiques

Montrer que l'utilisation des rendements historiques tend à produire des pondérations encore plus extrêmes que dans le cas de rendements égaux ...



Commenter.

6 Optimisation avec contraintes

L'optimisation conduit à accentuer les erreurs d'estimations, à sur-pondérer (sous pondérer) les actifs avec des rendements espérés élevés (resp. faibles), des corrélations négatives (resp. positives) et de faibles variances (resp. élevées). Intuitivement, les actifs avec des rendements extrêmes sont les plus sujets à erreurs d'estimation.

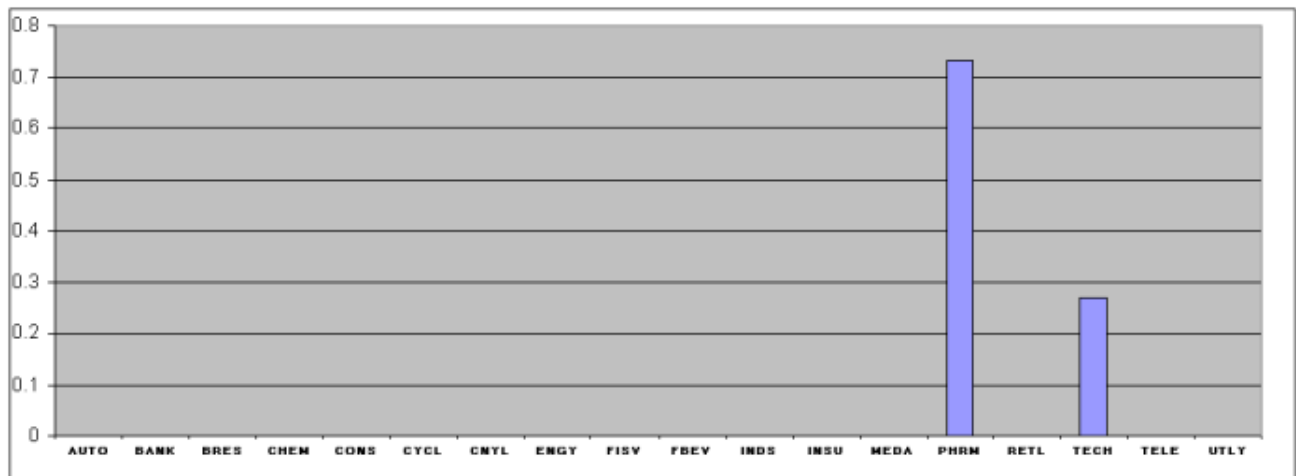
Un premier remède peut consister à ajouter des contraintes, par exemple ne pas autoriser les ventes à découvert ni les emprunts (levier).

Ce qui se traduit par le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max_w w^T \Pi - \frac{1}{2} \gamma w^T \Sigma w \\ w_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, n & \quad \text{pas de vente à découvert} \\ \sum w_i \leq 1 & \quad \text{pas d'emprunt} \end{aligned}$$

Résoudre ce problème à l'aide du solveur excel.

Montrez que le portefeuille qui en résulte n'est pas bien diversifié, conduisant à ignorer certains actifs.



7 Pondérations d'équilibre

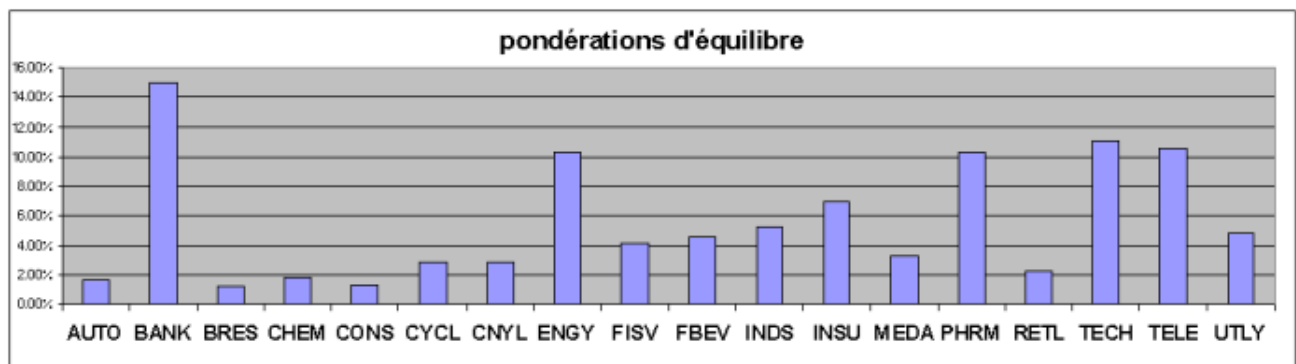
Les différentes méthodes vues précédemment conduisent à des pondérations improbables. Les pondérations qui en résulte sont très éloignées des pondérations d'équilibre.

7.1 A partir des capitalisations

Le CAPM nous enseigne que l'équilibre de marché, résultat de l'offre et de la demande, conduit à un portefeuille de marché dont les pondérations sont proportionnelles aux capitalisations. Connaissant les capitalisations, c'est à dire les poids w_{cap} dans l'indice (fournies dans le données), on peut inverser la relation 2 pour retrouver les rendements implicites Π d'équilibre :

$$\Pi = \gamma \Sigma w_{cap}$$

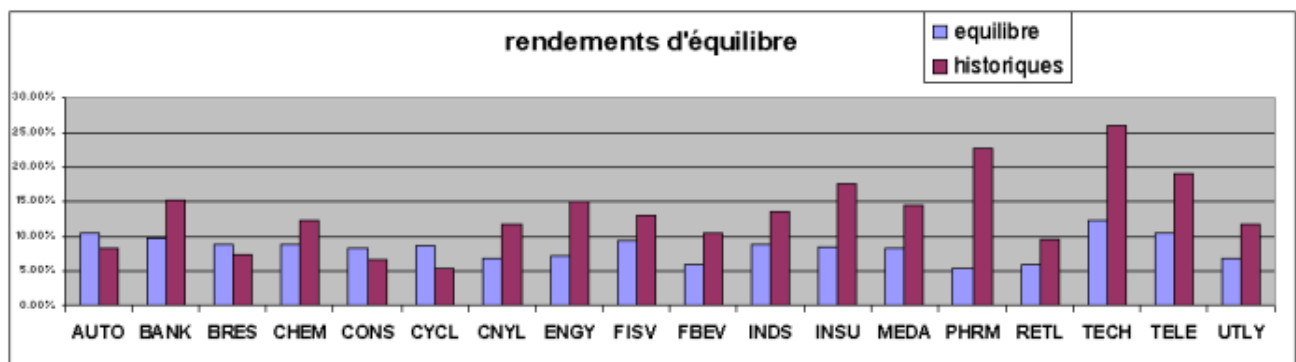
Les pondérations sont indiquées dans le fichier de données (colonnes capitalisations) :



Calculer les rendements d'équilibre, en utilisant les données fournies dans le fichier dans la colonne "capitalisation". On prendra $\gamma = 3$.

Comparer avec les rendements historiques.

Commenter ...



On voit que même si les rendements implicites d'équilibre semblent "relativement proches" des rendements historiques, les pondérations sont totalement différentes.

7.2 Prime de risque du marché

Calculer la volatilité du marché σ_M , en utilisant $\sigma_M^2 = w_{cap}^T \Sigma w_{cap}$.

Dans le cas du portefeuille de marché, de rendement R_M et volatilité σ_M , on a la relation

$$\gamma = \frac{R_M - r_{free}}{\sigma_M^2} \quad (3)$$

avec γ l'aversion au risque.

Calculer la prime de risque correspondante $R_M - r_{free}$ en utilisant la relation précédente.

7.3 A partir des betas

Une autre façon pour obtenir les rendements d'équilibre consiste à utiliser le modèle du CAPM :

$$r_i - r_f = \beta_i (r_M - r_f)$$

avec

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_M)}{\sigma_M}$$

Déterminer les rendements d'équilibre en excès $\Pi_{i, equil} = r_i - r_f$ à partir des betas fournis dans le fichier des données. Retrouver les pondérations correspondantes en appliquant la relation 2.

Commentaires ?

Comparer avec les relations d'équilibre issus des pondérations. On pourra aussi déterminer les betas implicites à partir des rendements d'équilibre issus des capitalisations par

$$\beta_{i, cap} = \frac{\Pi_{i, cap}}{r_M - r_f}$$

8 L'approche de Black Litterman

On notera $E(R)$ les rendements espérés. Ces rendements espérés sont inconnus, ils vont intégrer à la fois des vues du gérant ainsi que les relations d'équilibre Π tels que définis dans la section précédente, déterminés à partir des pondérations de capitalisation. Ces rendements d'équilibre ont des fondements solides qui ne peuvent pas être ignorés. On s'autorise néanmoins à des écarts en fonction des vues du gérant, mais ces écarts devront être faibles. On suppose que les rendements espérés sont distribués autour des rendements implicites

d'équilibre avec une matrice de covariance proportionnelle à la matrice de covariance initiale. Le facteur de proportionnalité est τ qui sera plus ou moins faible en fonction des niveaux de confiance dans le marché, plus τ et plus la confiance dans le marché sera grande.

Dans le cas où on ne dispose pas de vue particulière, $\tau = 0$, les rendements espérés seront égaux à Π . Dans le cas de vues, il faut combiner ces vues avec l'équilibre (Π et w_{cap}) de manière optimale, c'est tout l'objet, la difficulté de l'approche de Black Litterman.

On peut spécifier les vues de différentes manières :

- en relatif, du type "le secteur A va surperformer le secteur B de 5%",
- ou de manière absolue : "le secteur C a un rendement espéré de 10%".

Pour le moment, supposons que nous pouvons préciser ces vues sous la forme matricielle suivante :

$$P.E(R) = V + \epsilon$$

avec P une matrice k lignes et n colonnes, avec k le nombre de vues et n le nombre d'actifs, ϵ un terme d'incertitude sur la vue, traduisant la confiance dans la vue. $P.E(R)$ est supposé normalement distribué de moyenne V et matrice de covariance Ω correspondant au terme d'incertitude ϵ .

$$P.E(R) \sim N(V, \Omega)$$

Dans le cas de vues certaines, $P.E(R) = V$ ($\Omega = 0$). On montre que l'espérance de $E(R)$ est : (voir annexe 11)

$$E(\bar{R}) = \Pi + (\Sigma)P^T(P\Sigma P^T)^{-1}(V - P\Pi)$$

On voit donc que même dans le cas de vues certaines, l'espérance du rendement $E(\bar{R})$ ne sera pas nécessairement égale à la vue, mais aux rendements d'équilibre plus un terme correcteur. On notera que la solution ne dépend pas de τ .

Pour un nombre de vues $k < n$, on voit aussi qu'une confiance certaine dans les vues ne conduit pas nécessairement à ignorer les rendements d'équilibre. Il en va différemment pour $k = n$, dans ce cas, les rendements d'équilibre sont ignorés en faveur des vues.

Dans le cas de vues incertaines $P.E(R) \sim N(V, \Omega)$, l'espérance de $E(R)$ est (voir annexe 11)

$$E(\bar{R}) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}V]$$

Sous une complexité apparente, cette formule (connue sous le nom de "Master Formula") s'interprète facilement. L'espérance des rendements $E(R)$ apparaît comme une "moyenne" pondérée :

- des rendements Π avec un "coefficient" de pondération $(\tau\Sigma)^{-1}$, qui sera d'autant plus fort que τ et Σ seront faibles.

- des vues V avec un "coefficient" de pondération $P^T \Omega^{-1}$ qui sera d'autant plus fort que l'incertitude sur la vue Ω sera faible.

Lorsque le gérant est moins confiant dans ses vues l'espérance du rendement sera plus proche des rendements d'équilibre (Π).

L'espérance des rendements apparaît donc comme un "compromis" (mais optimal) entre l'équilibre de marché et les vues.

Le cas d'un seul actif :

- π le rendement d'équilibre, σ^2 la variance,
- $E(r) \sim N(v, \omega^2)$

la relation précédente devient :

$$E(\bar{R}) = \frac{\frac{\Pi}{\tau\sigma^2} + \frac{v}{\omega^2}}{\frac{1}{\tau\sigma^2} + \frac{1}{\omega^2}} \quad (4)$$

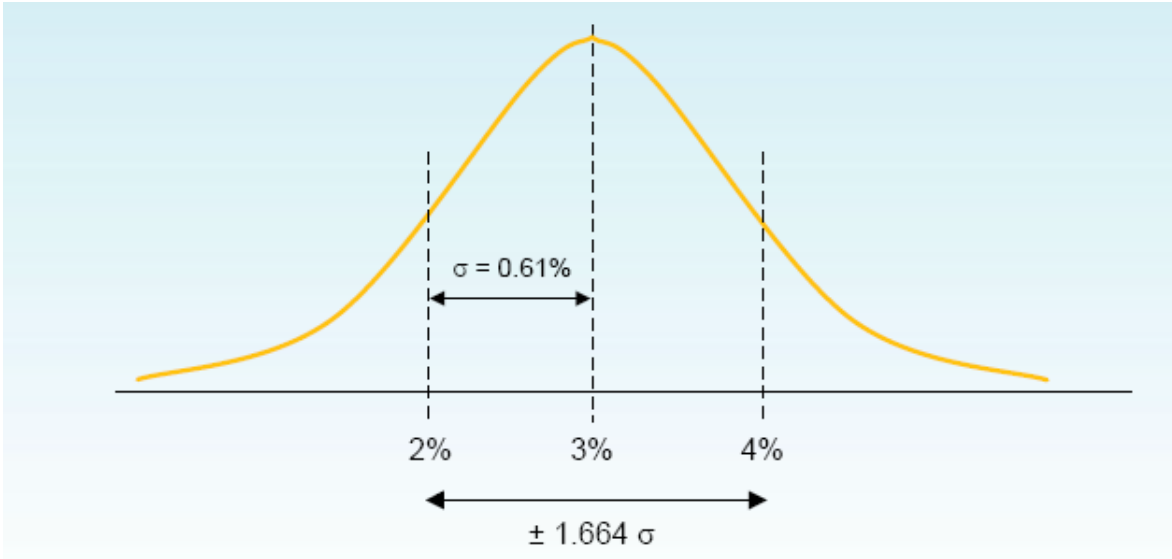
Clairement, l'espérance du rendement est bien une "moyenne" entre le rendement d'équilibre et la vue.

9 Spécification des vues

Considérons par exemple, la vue suivante : "Les secteurs de la Pharmacie et des valeurs Industrielles va sur performer les Telecom et les Technologies par 3%, à $\pm 1\%$ avec une confiance 90%. Cette vue s'exprime de la manière suivante :

$$[w_{PHRM}E(R_{PHRM}) + w_{INDU}E(R_{INDU})] - [w_{TELE}E(R_{TELE}) + w_{TECH}E(R_{TECH})] \sim N(3\%, 0.61^2)$$

La performance relative de $3\% \pm 1\%$ avec une confiance 90% est interprété comme un variable aléatoire normalement distribuée de moyenne 3% et variance telle que 90% se trouve entre $2\% = 3 - 1$ et $4\% = 3 + 1$, autrement dit tel que $1.644854\sigma = 1\%$, soit $\sigma = 0.61\%$



Une vue absolue peut être formulée de la manière suivante : "le secteur des biens non cycliques sera de 7.5% \pm 1.5% (à 90% de confiance)".

Se traduisant par :

$$1.E(R_{CNYL}) \sim N(7.5\%, 0.91\%^2)$$

De la même façon que précédemment, $\sigma = 0.91$ correspond à l'écart type normal, tel que $1.5 = 1.645 * \sigma$.

On peut combiner ces deux vues sous une forme matricielle, à savoir que la matrice P de 2 lignes (nombre de vues) et 18 (nombre d'actifs) colonnes

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.34 & 0 & 0 & 0.66 & 0 & -0.51 & -0.49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} E(R_{AUTO}) \\ \vdots \\ E(R_{UTLY}) \end{pmatrix} \sim N(V, \Omega)$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} 3\% \\ 7.5\% \end{pmatrix}$$

et

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.61\%^2 & 0 \\ 0 & 0.91\%^2 \end{pmatrix}$$

Noter que les éléments non diagonaux sont nuls. Autrement dit, on considère que les vues sont indépendantes entre elles.

A réaliser sous excel, en utilisant les données précédentes (voir fichier xls) :

- Calculer l'espérance de $E(R)$. Commenter les résultats obtenus.
- A l'aide de ces nouveaux rendements appliquer 2 pour trouver les nouvelles pondérations optimales. Les pondérations optimales sont obtenues en effectuant une optimisation espérance/variance

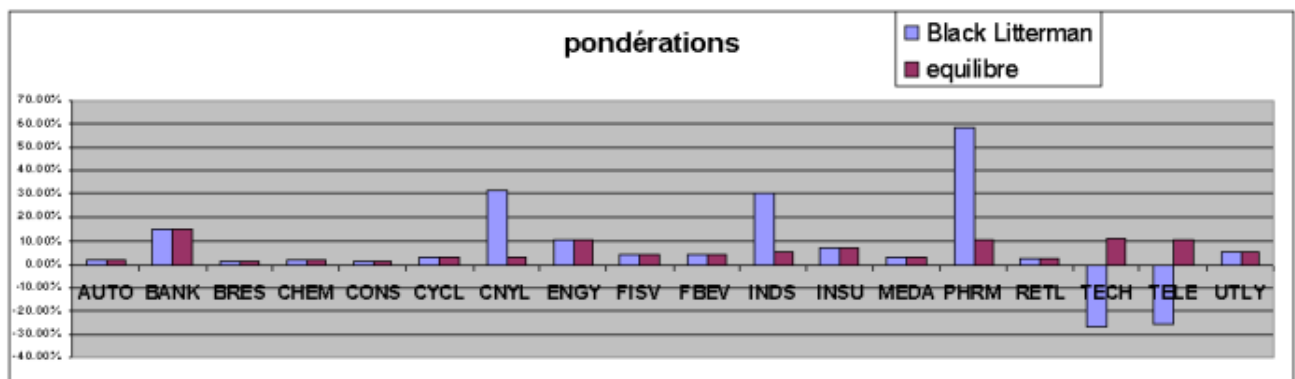
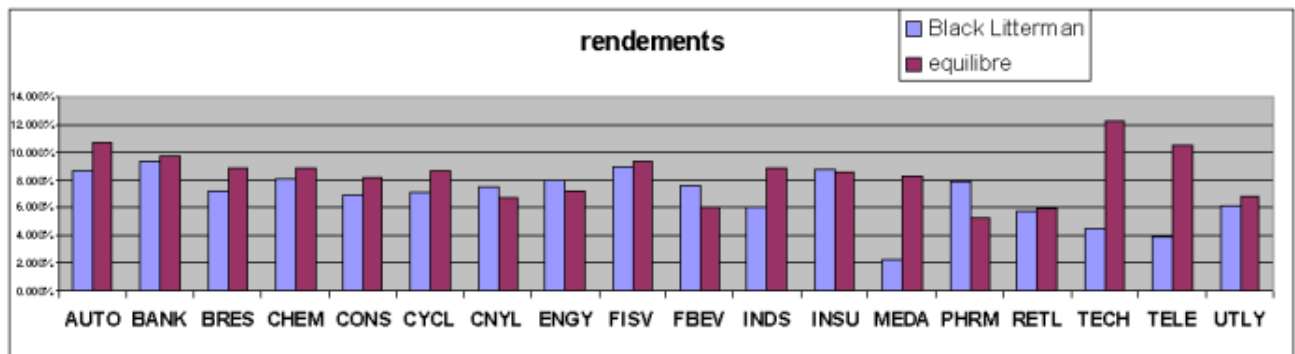
$$w_{BL} = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} E(\bar{R})$$

solution du problème 2 avec $E(R)$

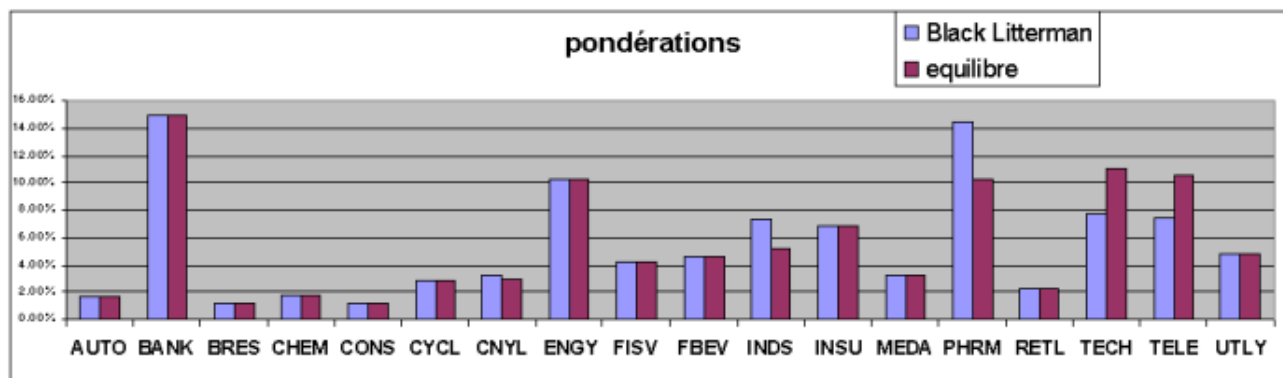
- Commenter les résultats obtenus.

Pour les calculs pratiques, on prendra $\tau = 0.3$.

Résultats attendus :



Commenter ces résultats :
 Etudier la sensibilité des résultats en fonction de τ
 par exemple pour $\tau = 0.0001$



10 Calibrations

La calibration consiste à retrouver les valeurs de paramètres du modèle à partir des données du marché. Ainsi, le paramètre d'aversion au risque γ est lié à la prime de risque par la relation 3.

Le paramètre τ qui intervient dans la formule de BL peut être calibré de plusieurs manières (cf. Idzorek [3]). Une première méthode consiste à rechercher un compromis entre la confiance totale représentée par la variance totale $trace(\Omega)$ et un terme d'incertitude sur les vues liées au marché $\tau 1_k^T P \Sigma P^T 1_k$, avec 1_k le vecteur de dimension k contenant des 1 :

$$\tau = \frac{trace(\Omega)}{1_k^T P \Sigma P^T 1_k} \quad (5)$$

En appliquant la relation précédente dans le cas d'un seul actif, (voir ci dessus 4), on obtient :

$$\tau^* = \frac{\omega^2}{\sigma^2}$$

et

$$E(\bar{R}) = \frac{1}{2}(\pi + v)$$

montrant que le choix de τ^* conduit à un rendement moyen entre le rendement d'équilibre et la vue.

Une autre façon pour calibrer τ consiste à examiner les performances attendues. L'”Information Ratio” anticipé (ex ante) doit rester ”raisonnable”. Ce ”ratio d'information” (cf Grinold [2]), est égal au rendement en excès divisé par l'écart type des rendements en excès, plus connu sous le nom d'erreur de tracking (voir ci après pour le calcul détaillé de l'erreur de tracking). Un ratio d'information réaliste ne peut dépasser 2 : des rendements anticipés qui s'écartent de plus de 2 écart type des rendements d'équilibre sont très improbables. Si le ratio d'information est supérieur à 2, il suffit de diminuer τ jusqu'à obtenir un ratio d'information égal à 2.

Calculer τ en utilisant la relation 5

Calculer le portefeuille qui en résulte :

- les rendements $E(R)$ en appliquant Black Litterman
- les pondérations w qui en résulte en recherchant le portefeuille solution du problème d'optimisation 2.
- les pondérations relatives w_E :

$$w_E = w - w_{cap}$$

avec w_{cap} le vecteur des pondérations d'équilibre (capitalisations)

- le rendement en excès

$$\mu_E = w_E^T E(R)$$

- l'erreur de tracking :

$$\sigma_E^2 = w_E^T \Sigma w_E$$

- le ratio d'information

$$I = \frac{\mu_E}{\sigma_E}$$

- ajuster τ si le ratio d'information est supérieur à 2.

11 Annexe

11.1 Caculs des solutions pour Black Litterman

Nous recherchons la distribution conditionnelle des vues $E(R)$ sachant les relations d'équilibre Π .

Par application du théorème de bayeses, on sait que

$$P(vue|equilibre) = P(equilibre|vue)P(vue)/P(equilibre) \propto P(equilibre|vue)P(vue)$$

ou

$$P(E(R)|\Pi) \propto P(\Pi|E(R))P(E(R))$$

La distribution conditionnelle de $P(\Pi|E(R))$ est gaussienne

$$P(\Pi|E(R)) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

la distribution non conditionnelle de $P.E(R)$ est également gaussienne,

$$P.P(E(R)) \sim N(V, \Omega)$$

le produit $P(E(R)|\Pi)$ est aussi gaussien.

La distribution non conditionnelle de $E(R)$ n'est connue qu'indirectement via l'expression des vues $P.E(R)$. Plusieurs solutions peuvent exister. On cherchera alors à maximiser le maximum de vraisemblance de la distribution gaussienne résultante.

Dans le cas de vues certaines, on doit résoudre le problème suivant :

$$\min_E [E - \Pi]^T (\tau\Sigma)^{-1} [E - \Pi]$$

sous la contrainte $P.E = V$.

Le lagrangien est :

$$L = [E - \Pi]^T (\tau\Sigma)^{-1} [E - \Pi] - \lambda(P.E - V)$$

On obtient

Dans le cas de vues incertaines, les rendements d'équilibre E sont solutions du programme d'optimisation qui consiste à minimiser :

$$\min_E [E - \Pi]^T (\tau\Sigma)^{-1} [E - \Pi] + [P.E - V]^T \Omega^{-1} [P.E - V]$$

La solution s'obtient par simple dérivation de l'expression précédente :

$$E = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} V]$$

les rendements d'équilibre a posteriori sont normalement distribués : de moyenne E et matrice de covariance :

$$E(R)|\Pi \sim N \left(E, [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} \right)$$

11.2 Produit de variables aléatoires gaussiennes

une distribution gaussienne multivariée de moyenne μ et matrice de covariance Σ définie positive de dimension d , a pour densité :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

Le produit de deux gaussiennes multivariées est également une gaussienne multivariée

$$N(\mu_a, \Sigma_a) \cdot N(\mu_b, \Sigma_b) \sim N(\mu_c, \Sigma_c)$$

avec

$$\Sigma_c = (\Sigma_a^{-1} + \Sigma_b^{-1})^{-1} \text{ et } \mu_c = \Sigma_c (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b)$$

S'applique par exemple dans le cas d'inférence bayésienne lorsque les distribution à priori $p(\theta)$ et la vraisemblance $p(\text{data}|\theta)$ sont gaussiennes, la distribution a posteriori est également gaussienne :

$$p(\theta|\text{data}) \sim p(\text{data}|\theta)p(\theta)$$

Ce résultat peut être généralisé à un produit de gaussiennes multivariées $X_k \sim N(\mu_k, \Sigma_k)$:

$$\prod_{k=1, K} N(\mu_k, \Sigma_k) \sim N(\mu, \Sigma)$$

avec

$$\Sigma = \left(\sum_{k=1}^K \Sigma_k^{-1} \right)^{-1}$$

et

$$\mu = \Sigma \left(\sum_{k=1}^K \Sigma_k^{-1} \mu_k \right)$$

12 References

- [1] BLACK, F & LITTERMAN, R. "*Global Portfolio Optimization*". Sep 1992.
- [2] GRINOLD, R. C & KAHN, R. N. "*Active Portfolio Management*". McGraw-Hill, 1999.
- [3] IDZOREK, T. M. "*A step-by-step guide to the Black-Litterman model*", 2002. ...
- [4] JORION, P. "*Portfolio Optimization with Tracking-Error Constraints*". Financial Analyst Journal - AIMR, 59, Sep/Oct 2003. ...
- [5] LUENBERGER, D. "*Investment Science*". Oxford University Press, New York, 1998.
- [6] ZIMMERMANN, H. & DROBETZ, W. & OERTMANN, P. "*Global Asset Allocation : New methods and applications*". Wiley, Nov 2002.