

MODELES STOCHASTIQUES et MARCHÉS FINANCIERS

Majeure de Mathématiques Appliquées

Nicole EL KAROUI

email : elkaroui@cmapx.polytechnique.fr

La bourse



Une salle de marché

PRÉAMBULE

Cours en deux fois deux parties

Outils probabilistes :
autour du brownien

Deux cours

- Mouvement brownien
- Calcul stochastique pour le brownien
- EDP de la chaleur et calcul d'espérance

Les marchés financiers :
autour de Black et Scholes

Deux cours

- Marchés de dérivés
- Théorie du portefeuille et couverture des options
- Formule de Black et Scholes et Applications

Changement de probabilité et Evaluation risque neutre

Deuxième partie

Extensions

Outils probabilistes

Deux cours

- Intégrale d'Itô,
- Calcul d'Itô et Equations différentielles stochastiques
- Processus de diffusion, propriété de Markov et EDP
- Changement de probabilités

Le meilleur glossaire du Web en français

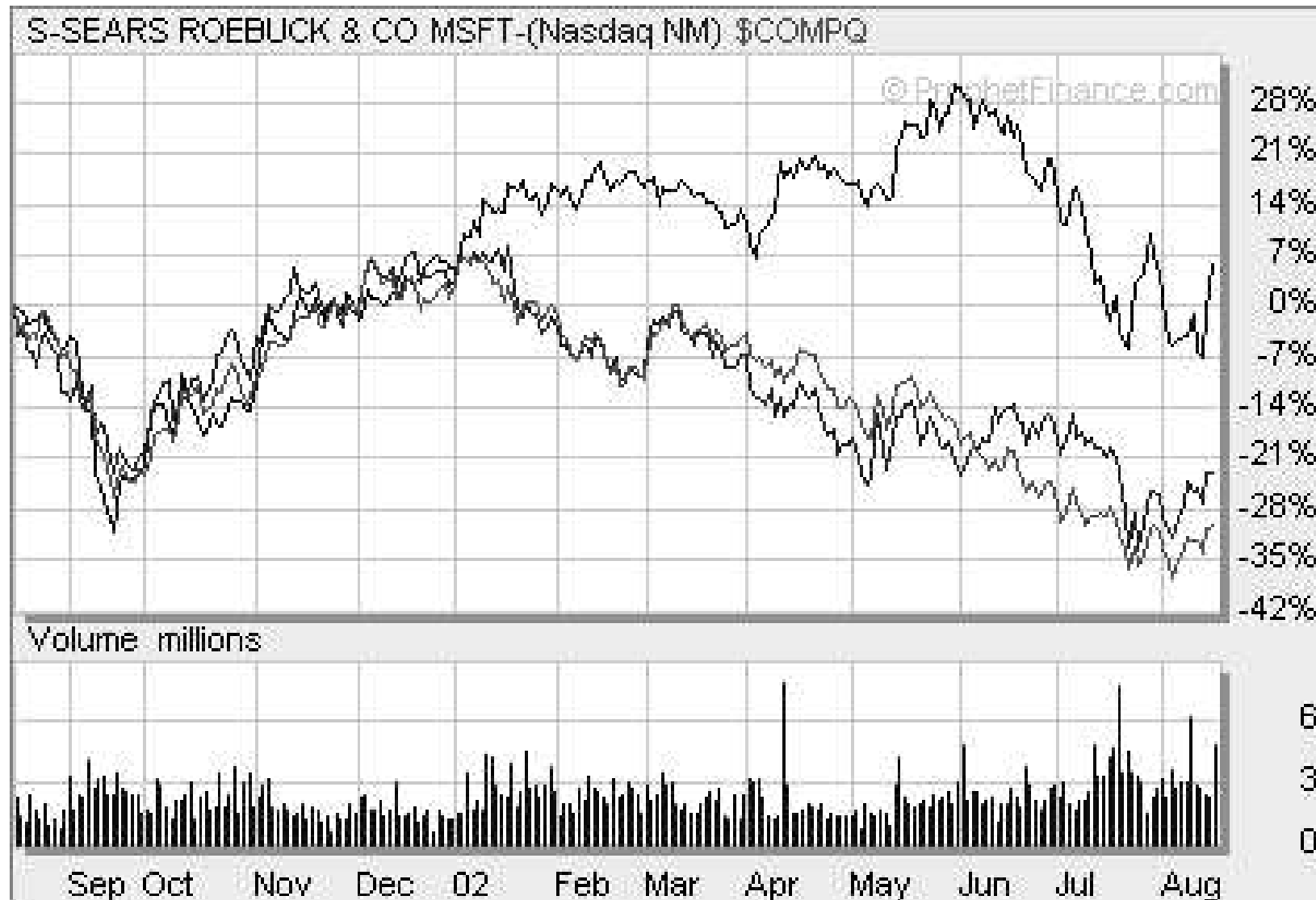
[http : //www.guide-finance.ch](http://www.guide-finance.ch)

Couvertures des risques

Deux cours

- Concept de non arbitrage et de l'évaluation risque-neutre
- Marchés des changes ou à plusieurs actifs.
- Introduction aux produits dérivés de taux d'intérêt.

Indices



Microsoft et le NASDAQ en 2002

Brève histoire du Brownien

Le mouvement brownien

un modèle pour les phénomènes aux mouvements très erratiques

- en Physique,
- Economie et Finance
- Biologie.

Première observation et description par **Robert Brown**

(1773-1858), **botaniste** anglais pour le mouvement des particules en suspension dans un liquide.

En **1905** **Albert Einstein** construit un modèle pour décrire la trajectoire des atomes soumis à des chocs : la densité vérifie l'**équation de la chaleur** et de ce fait est **gaussienne**.



Louis Bachelier 1870-1946

Louis Bachelier

(1870-1946)

a soutenu en 1900 à la Sorbonne, sous la direction de **Henri Poincaré**, une thèse intitulée

Théorie de la spéculation

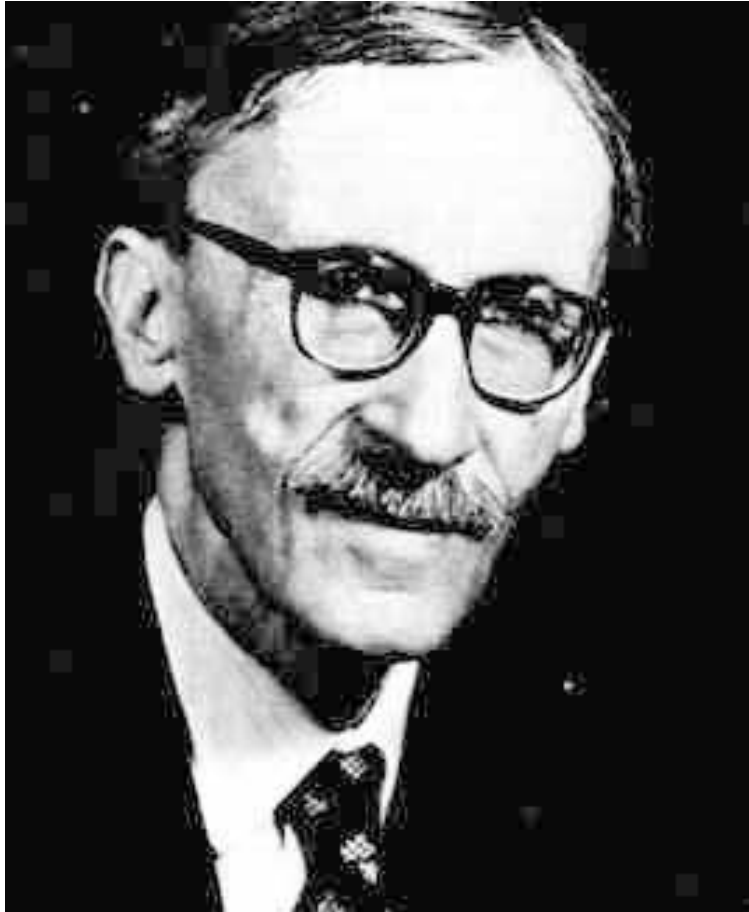
Il introduit **le mouvement brownien** et jette les bases de la **finance moderne**.

Wiener, Lévy, Itô, et les autres

- **Norbert Wiener** (1894-1964) en 1923 construit rigoureusement la “fonction aléatoire” du mouvement brownien, et donne de nombreuses applications en **théorie du signal et des télécommunications**.
- **Paul Lévy, X1904** (1886-1971), **Professeur à l’X**, développe l’étude **mathématique** du mouvement brownien et montre les **propriétés surprenantes** de la fonction brownienne :
 - non différentiabilité
 - grandes oscillations
 - propriétés des courbes dans l’espace.

Une vision **géométrique** vraiment exceptionnelle d’un phénomène complexe.

- **Kyioshi Itô**(1915-) développe systématiquement le **calcul différentiel stochastique** d'Itô et étudie les **EDS**, équations différentielles stochastiques, et les processus de diffusion.
- Depuis, ce domaine n'a cessé de se développer, en France notamment en liaison avec la théorie des martingales **J.L.Doob, P.A. Meyer**.

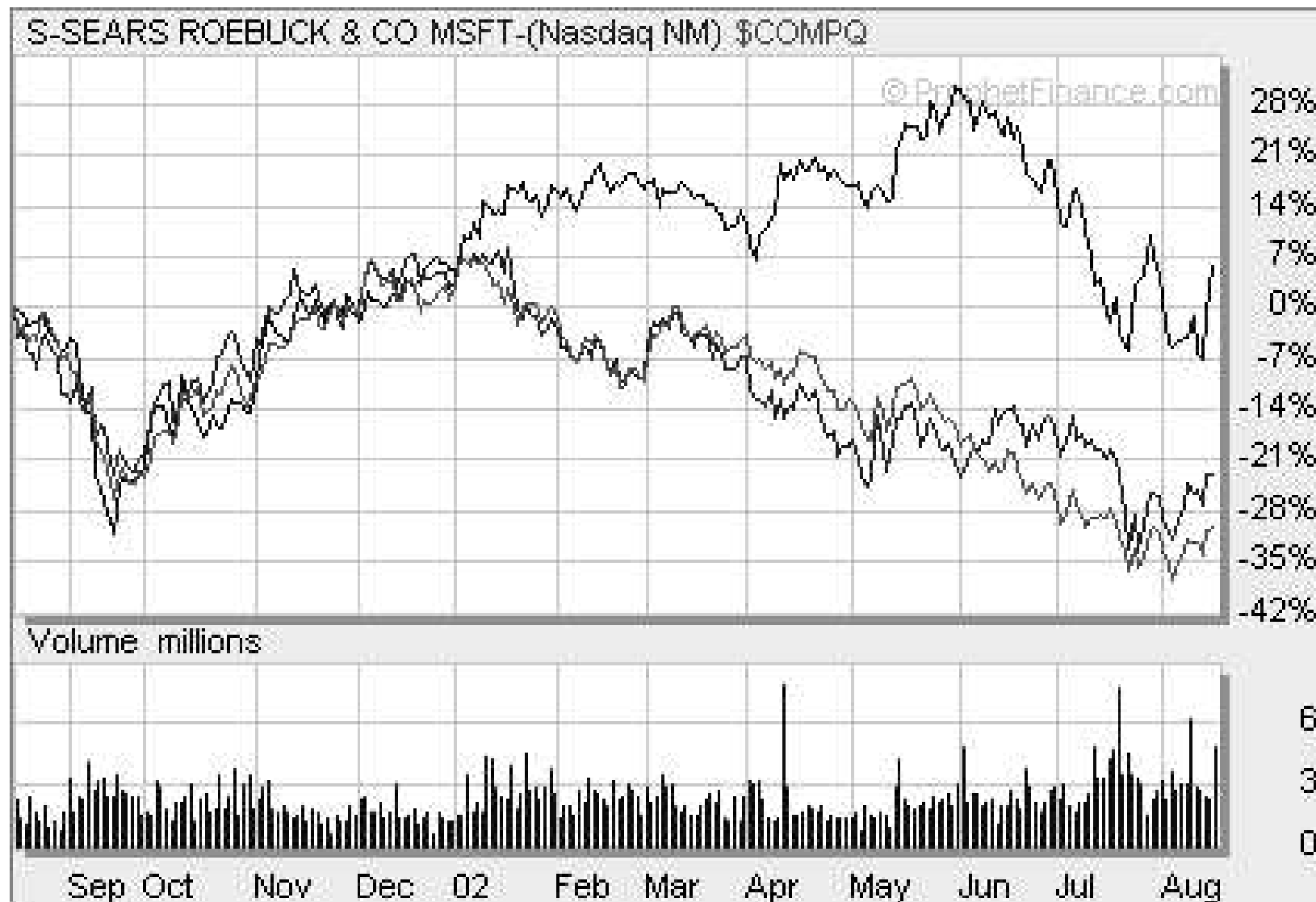


Paul Lévy (1886-1971)



Kyioshi Itô (1915- .)

Indices



Microsoft et le NASDAQ en 2002

Les trajectoires du mouvement brownien

Un phénomène aléatoire complexe

L'incertain concerne les **trajectoires** = **la fonction** qui décrit l'évolution du phénomène au cours du temps.

$$t \rightarrow X_t(\omega) \quad t \in T$$

On parle aussi de **fonctions aléatoires**.

Exemple : $S_t(\omega) = \sum_1^n A_m(\omega) \sin[2\pi f_m t + \varphi_m(\omega)]$

C'est un **signal aléatoire**, superposition de **sinusoides**

- de fréquences f_m fixes ($f_m \in \mathbb{R}$) ;
- les phases φ_m et les amplitudes A_m sont des **v.a.**

C'est un **modèle** pour les phénomènes de **bruit** dans la transmission d'ondes radar, ou, en Economie, des phénomènes oscillatoires de consommation.

Définition du Brownien

Def : Un **mouvement brownien** (standard) réel (sur $\mathbf{T} = \mathbb{R}^+$ ou $[0, T]$) est une f.a.r. $\{W_t; t \in \mathbf{T}\}$ à **trajectoires continues**, telle que

$$\Rightarrow W_0 = 0;$$

$\Rightarrow$ Tout accroissement $W_t - W_s$ où $(0 \leq s < t)$ suit une loi **gaussienne** centrée, de variance $(t - s)$.

$\Rightarrow$ Pour tout $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les accroissements $\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}; 0 \leq i \leq n - 1\}$ sont **indépendants**.

• La probabilité pour que W_t appartienne à $[x, x + dx]$ est donnée par la densité gaussienne

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}_t \in [\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}]) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\mathbf{x}^2/2t)d\mathbf{x}$$

Exemple de courbe brownienne

La v.a. W_t , gaussienne centrée de variance t , est comprise entre les deux nombres $f_1(t) = 2\sqrt{t}$ et $f_2(t) = -2\sqrt{t}$ avec une probabilité de 95%. En fait La propriété d'encadrement est valable pour toute la trajectoire sur $[0, T]$.



Une trajectoire brownienne et les courbes $+, -2\sqrt{t}$

Les grands théorèmes de probabilité

Loi des grands nombres

Soit $U_1, U_2, \dots, U_n$ une suite de v.a. réelles, **indépendantes** et de même loi, (**iid**), intégrables ou positives.

La **moyenne** empirique des U_i au cours de n observations est la v.a. $\frac{S_n}{n}$.

Théorème : $\frac{S_n}{n}$ converge p.s. vers $\mathbb{E}(U_1)$.

Théorème de la limite centrale

Sous les mêmes hypothèses, mais en supposant que les v.a. sont de carré intégrable, la suite de v.a. renormalisée

$Z_n = \frac{S_n - n\mathbb{E}(U_1)}{\sqrt{n \operatorname{var}(U_1)}}$ converge **en loi** vers la **loi gaussienne**

centrée réduite de fonction de répartition $\mathcal{N}(\mathbf{x})$.

$$\mathbb{P}(Z_n \leq x) \rightarrow \mathcal{N}(x)$$

Les gaussiennes

⇒ X est une v.a. gaussienne centrée, réduite si sa loi a pour densité

$$\mathbb{P}(X \in [x, x + dx]) = g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2) dx$$

⇒ Un vecteur gaussien est un vecteur dont toutes les **combinaisons linéaires** des coordonnées sont des **gaussiennes** sur $\mathbb{R}$.

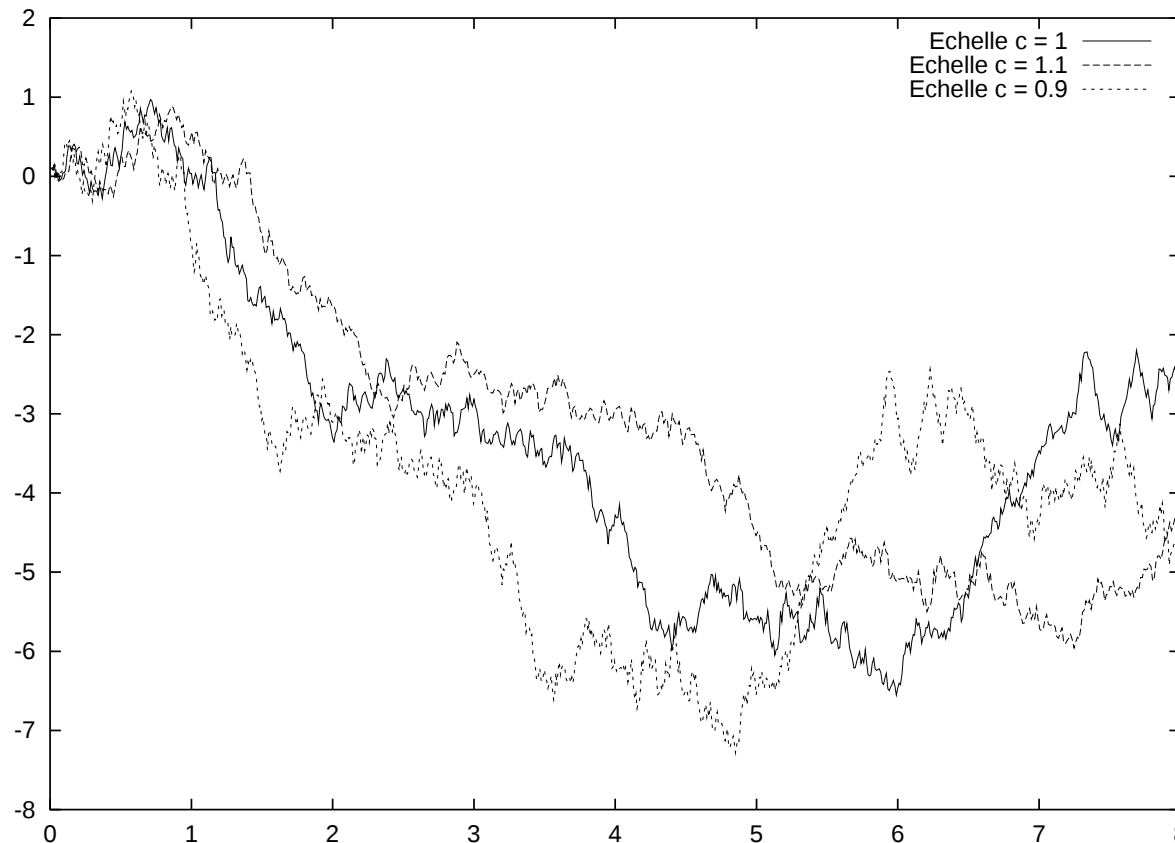
⇒ La **transformée de Laplace** est de la forme

$$\mathbb{E}(\exp(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i)) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}(X_i) - \frac{1}{2} \text{var}(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i)\right)$$

⇒ Si (X_n) est une suite de v.a. gaussiennes qui **converge en loi** vers X . Alors X est une **gaussienne**.

Propriétés de scaling du brownien

Une dilatation en espace de c est analogue à dilatation en temps de $c^2 t$.



Courbes browniennes avec différents scaling

Pour tout $c > 0$, la
f.a $\{W_t^c; t \in \mathbb{R}^+\}$
est un **brownien**

$$W_t^c = c^{-1} W_{c^2 t}$$

La courbe brownienne

Par la loi des grands nombres, $\frac{W_n}{n}$ cvge presque sûrement (p.s.) vers 0.

Comportement à l'infini

Le brownien oscille entre $+\infty$ et $-\infty$ si $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} p.s. \quad \limsup W_t &= +\infty, \quad \liminf W_t = -\infty \\ \frac{W_t}{t} &\rightarrow 0, \quad p.s. \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Irrégularité des trajectoires

- **Les trajectoires ne sont p.s. pas différentiables :**

$\Rightarrow$ Le fait que le processus $\{\widehat{W}_t = tW_{1/t}, t > 0, \quad \widehat{W}_0 = 0\}$ soit un mouvement brownien permet de ramener en 0 les propriétés à l'infini..

$\Rightarrow$ En particulier, le brownien n'est pas dérivable en zéro, et donc par stationnarité en aucun point.

$$\limsup_{h \downarrow 0} \left| \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right| = +\infty \quad p.s.$$

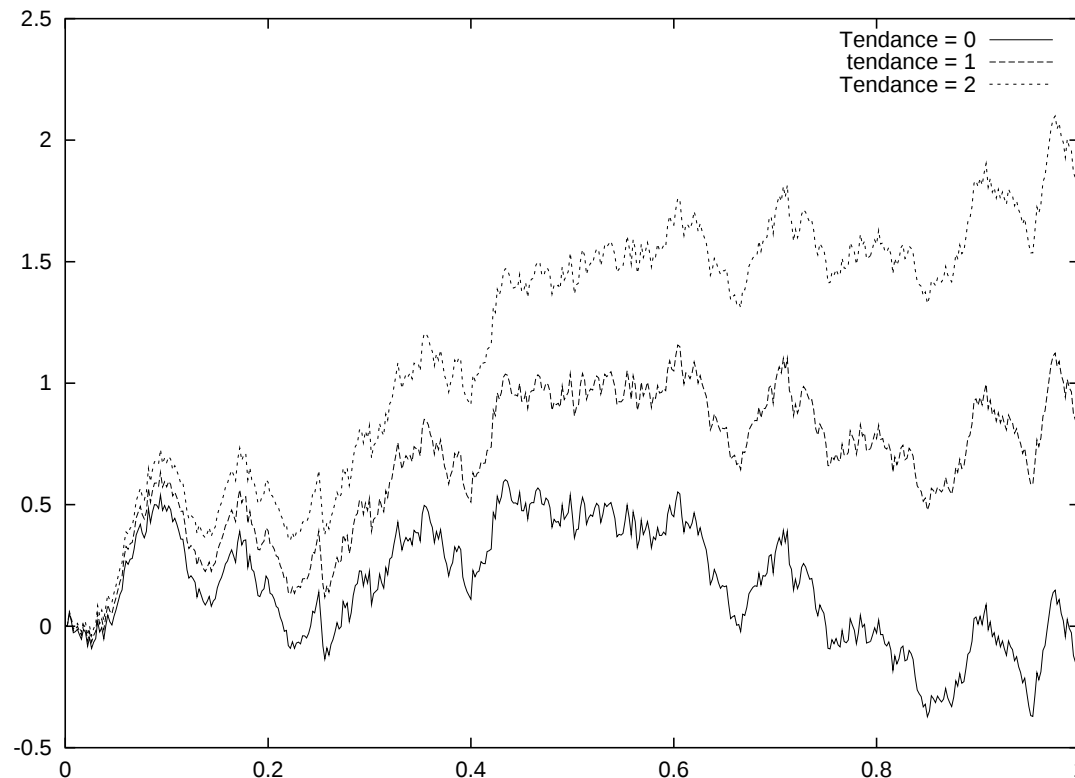
Remarque : Loi du logarithme itéré

En fait, si

$$h(t) = \sqrt{2 \log \log t^{-1}} \quad (1)$$

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{h(t)} = 1 \quad p.s. \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{h(t)} = -1 \quad p.s.$$

Mouvement brownien avec dérive



Définition : Un mouvement brownien,

- issu de x
- de **dérive** (ou tendance) **b**
- de coefficient de **diffusion** **σ** est de la forme

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{x} + \sigma \mathbf{W}_t + \mathbf{b}t.$$

C'est toujours un **processus gaussien**

Le brownien de caractéristiques $(0, 0, 1)$ est dit **standard**.

Propriétés standards

Les propriétés suivantes du mouvement brownien standard sont classiques .

Propriétés de symétrie : $\{-W_t; t \in \mathbb{R}^+\}$ est un brownien.

Retournement du temps : Le processus retourné à l'instant T , $\widehat{W}_t^T = W_T - W_{T-t}$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

Invariance par translation

La f.a. translatée de $h > 0$, $\{\bar{W}_t^h = W_{t+h} - W_h; t \in \mathbb{R}^+\}$ est un brownien, indépendant du brownien arrêté en h , $\{W_s; s \leq h\}$.

Propriété de Markov

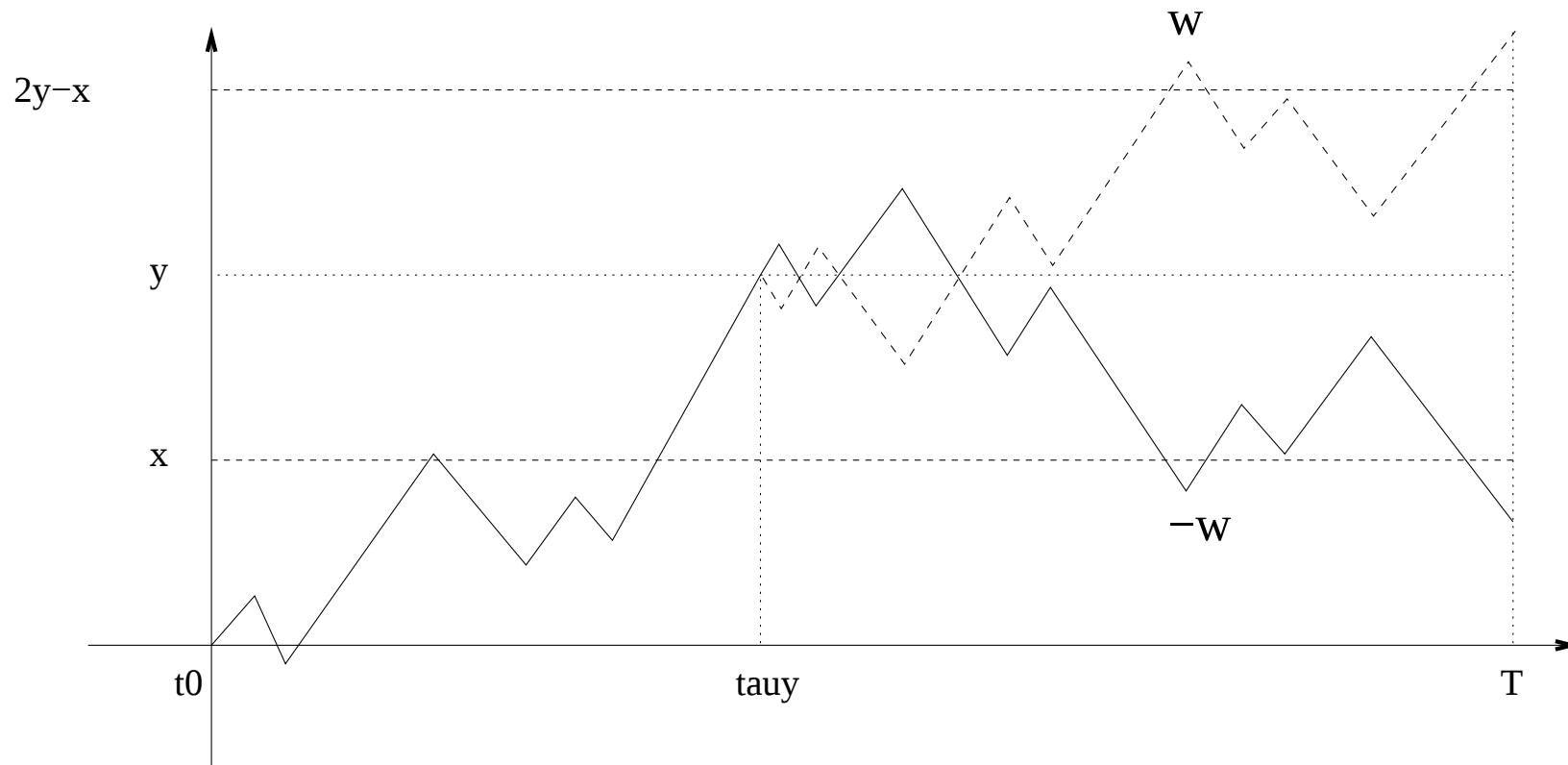
Vu de la date t , $(W_{t+h})_{h \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de la v.a. W_t . En particulier,

$$\mathbb{E}(f(W_{t+h} | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(f(X + W_h))$$

$$\text{où } X = W_t, \text{ indépendant de } W_s - W_t, t \leq s \leq t + h$$

Principe de symétrie

Soit $T_y = \inf\{t; W_t \geq y\}$ le premier temps de passage au-dessus de y .



Graphe d'une trajectoire symétrisée en T_y

Loi du maximum

Soit $T_y = \inf\{t; W_t \geq y\}$ le premier temps de passage au-dessus de x .

$$T_y \leq t \Leftrightarrow \sup_{u \leq t} W_u \geq y$$

Loi du maximum

$$\mathbb{P}(\sup_{u \leq t} W_u \geq y) = 2\mathbb{P}(W_t \geq y) = \mathbb{P}(|W_t| \geq y)$$

Loi du couple (maximum, brownien)

$$\mathbb{P}(\sup_{u \leq T} W_u \geq y, W_T \leq x) = \mathbb{P}(W_T \geq 2y - x)$$

Loi du temps d'atteinte

$$\mathbb{P}(T_y \leq t) = \mathbb{P}(|W_t| \geq y)$$

La preuve repose sur la propriété de **Markov forte** :

Propriété de Markov forte

Propriété de Markov au temps T_y

- La propriété d'invariance pas translation est vraie à partir du temps T_y :
 $\Rightarrow (W_{T_y+t} - y)$ est un brownien **indépendant** de ce qui s'est passé avant l'instant T_y .

Propriété de Markov forte

- Un **temps d'arrêt** U est une v.a. telle que $\{U \leq t\}$ ne dépend que du passé avant t
- Pour tout t.a. borné U , $(W_{U+t} - W_U)$ est un brownien, **indépendant de W_U** et plus généralement du passé de W_U .