| | | |
|---|---|---|
| Université Paris 7<br>Master 1ère année | | 2005/2006<br>E. Temam |

# Mathématiques financières

## Partie I

Email : temam@math.jussieu.fr

# I. Les marchés financiers

Le Marché Financier est le marché sur lequel s'échangent les valeurs mobilières : actions, obligations et titres dérivés (certificats d'investissement, titres participatifs, warrants...etc.).

## *A. Vocabulaire des marchés financiers*

- Un **titre financier** est un contrat où les parties s'échangent des flux d'argent.
- Un **marché financier** est un lieu où l'on achète et vend des titres financiers. Les opérateurs de marché sont le plus souvent autorisés à vendre à découvert (« short selling ») des titres qu'ils ne possèdent pas !

| | |
|---|---|
| | **Attention !** Vendre un titre à découvert signifie s'engager à en verser les revenus à l'acquéreur. Vous n'espériez tout de même pas avoir le beurre et l'argent du beurre ? Si ? Dommage… |

- La **valeur** d'un titre financier est un montant positif ou négatif, qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs. **Attention !** Rien ne garantit *a priori* que la valeur d'un titre soit unique : il existe souvent plusieurs méthodes de valorisation.
- Le **prix** d'un titre est un montant convenu entre deux parties en échange du titre. Le plus souvent c'est l'acheteur qui verse le montant, mais il arrive que le vendeur doive payer l'acheteur pour que celui-ci accepte un titre qui lui causera des pertes. **Attention !** le prix n'est pas forcément égal à la valeur : tout le monde n'a pas la même anticipation de l'avenir.

## *B. Les produits financiers*

Quatre grands types de produits financiers sont échangés à la bourse :

**Produits conditionnels : Warrants, Bons, Options**

⇧

**Actions** ⇦  ⇨ **Obligations**

⇩

**Contrats à terme**

## 1. Les actions

**Définition :** Une action est un Titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant à son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit à l'information et aux bénéfices (nommé dividende).

Il existe en réalité une très grande diversité d'actions dont nous présentons ici quelques exemples.

### a) L'action classique

C'est la forme la plus répandue. Ce titre de propriété s'acquière contre de l'argent soit au moment de la création de l'entreprise ou d'augmentations de capital soit directement sur le marché boursier. Elle est source de trois droits :

- un droit au pouvoir -via un droit de vote lors des assemblées générales- ;
- un droit à l'information ;
- un droit au résultat -sous forme de dividendes-. En effet, si la société réalise des bénéfices, l'actionnaire en recevra une partie au prorata du nombre d'actions qu'il possède. Le revenu de l'actionnaire s'appelle donc le dividende. Il dépend des résultats financiers de l'entreprise.

Depuis novembre 1984, les actions sont dématérialisées. Le papier a laissé place au code Sicovam stocké dans un énorme ordinateur. Un des grands avantages de cette dématérialisation est le renforcement de la sécurité. Impossible en effet pour un actionnaire de se faire voler ses titres.

### b) L'action privilégiée

Elle offre un privilège qui peut être une priorité lors des votes dans les assemblées générales ou une priorité lors de la distribution du dividende.

### c) L'action à dividende prioritaire - ADP

Les ADP ont été créées en 1978. Elles confèrent à leur détenteur un **accès privilégié aux dividendes**. Mais elles ne bénéficient pas de droit de vote. Elles présentent un rendement plus élevé que l'action ordinaire sans offrir le droit de vote.

Dès lors que le profit est positif, le dividende versé doit égaler au moins 7.5% de la valeur nominale de l'action. Sinon, lorsque le profit est négatif ou insuffisant, le versement du dividende doit être reporté sur les deux exercices suivants.

### d) Les certificats d'investissement

Les certificats d'investissement sont des titres **sans droit de vote** qui sont apparus après les nationalisations de 1981. L'objectif était de permettre des prises de participation par le public dans les entreprises nationalisées sans pour autant modifier l'actionnariat et faire perdre des voix à l'actionnaire principal, à savoir l'Etat. Ces titres, de moins en moins répandus sur le marché français, peuvent aussi bien être émis par des entreprises publiques que privées. On a donc :

Certificat d'Investissement + Droit de vote = Action

### e) Les ABSA ou Actions à Bons de souscription d'actions

Ce sont des actions qui donnent droit à leur détenteur de souscrire à de nouvelles actions à une date donnée. Elles sont en général, plus chères qu'une action classique.

**Résumé**

| | |
|---|---|
| **Action** | **Titre de propriété**<br>**Droit de l'actionnaire**<br>♦ Droit à l'information<br>♦ Droit de vote<br>♦ Droit à la rémunération<br>**Rémunération de l'action**<br>♦ Sous forme de dividende<br>♦ Sous forme d'augmentation du prix de l'action plus value<br>**Risque maximum de l'actionnaire :**<br>♦ limité à la valeur de ses actions |

SÉANCE DU VENDREDI 21 NOVEMBRE 2003

| 17:31 | € 21.34 | € +0.74 | +3.59% | Capitalisation |
|---|---|---|---|---|
| Plus haut | Plus bas | Ouverture | Clôture (20/11) | € 51 265 Millions |
| € 21.34 | € 20.60 | € 20.60 | € 20.60 | |

| | |
|---|---|
| Nombre de titres échangés : | 10 728 915 titres |
| Montant des titres échangés : | € 226 046 896 |
| (%) de titres échangés / nombre de titres inscrits (2 402 315 600) : | 0.45 % |
| Volume moyen sur les 30 dernières séances à 17:30 : | 7 055 326 titres |

FRANCE TELECOM

6, place d'Alleray
75505 Paris Cedex 15
France
www.francetelecom.com

Carte d'identité

| | |
|---|---|
| ISIN | FR0000133308 |
| Code local | 13330 |
| Places de cotation | Francfort \| Londres \| Paris \| Amsterdam \| New York \| Virt-x \| Buenos Aires |
| Indices de cotation | CAC 40 \| SBF 120 \| SBF 250 \| EURONEXT 100 \| ITCAC \| EURO STOXX 50 \| Premier Marché \| FTSEurofirst 100 \| FTSEurofirst 80 |
| Nombre d'actions | 2402315600 |
| Capitalisation | 51 265 414 904 |
| Secteur | Télécommunications |
| Industrie | Opérateur de Télécommunications |
| Sous-Industrie | Divers (Opérateurs de Télécommunication) |

Chiffres clés

| | |
|---|---|
| Chiffre d'affaires 2002 * | 46 630.00 |
| Chiffre d'affaires 2001 * | 43 026.00 |
| Chiffre d'affaires 2000 * | 33 674.00 |
| Chiffre d'affaires 1999 * | 27 233.00 |
| Chiffre d'affaires 1998 * | 24 648.00 |
| Résultat net 2002 * | -20 736.00 |
| Résultat net 2001 * | -8 280.00 |
| Résultat net 2000 * | 3 660.00 |
| Résultat net 1999 * | 2 768.00 |
| Résultat net 1998 * | 2 300.00 |
| Bénéfice net par action 2002 | -19.11 |
| Bénéfice net par action 2001 | -7.18 |
| Bénéfice net par action 2000 | 3.38 |
| Bénéfice net par action 1999 | 2.66 |
| Bénéfice net par action 1998 | 2.29 |

Euro / * en million(s)

| | 1 semaine | 1 mois | 3 mois | 1 an |
|---|---|---|---|---|
| Performance | 3.09 % | -1.39 % | -8.65 % | 75.17 % |
| Volume moyen | 8 803 110 | 8 267 040 | 8 783 970 | 9 328 370 |
| Volatilité | 33.31 | 25.90 | 26.99 | 52.72 |
| Beta | 0.00 | 0.76 | 0.85 | 1.07 |

**Exemple d'information sur l'action France Télécom**

## 2. Les Obligations

**Définition** : les obligations sont **des titres de créances** représentatifs de dettes. Une obligation donne droit au paiement d'un intérêt en général annuel et au remboursement du capital. Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. En cas de faillite de l'émetteur, le détenteur d'une créance est prioritaire sur l'actionnaire. Les obligations peuvent être émises par les entreprises privées ou publiques, ainsi que par l'Etat, les administrations publiques et les collectivités locales.

### a) Vocabulaire

La *valeur nominale* d'une obligation est celle qui sert de base au calcul de l'intérêt en général annuel versé (le *coupon*). Le coupon est alors égal au *taux facial* (fixé à l'émission) multiplié par le nominal.
Le *prix d'émission* est le montant du versement demandé au souscripteur lors de l'émission de l'obligation. Lorsque le prix d'émission est égal à la valeur nominale de l'obligation, l'émission est dite *au pair*. Mais l'obligation peut être émise soit en dessous (cas le plus fréquent), soit au-dessus de la valeur nominale. La différence entre la valeur nominale et le prix d'émission constitue alors la *prime d'émission*.
La *valeur de remboursement* est le montant perçu par l'obligataire en remboursement de son prêt. Lorsque la valeur de remboursement est égale à la valeur nominale, le remboursement est dit *au pair*. Mais la valeur de remboursement peut différer de la valeur nominale. La différence constitue alors la *prime de remboursement*.
La possibilité de verser des primes d'émission et/ou de remboursement permet notamment à l'émetteur de prendre en compte une évolution des taux du marché entre le montage du placement et l'émission effective.
L'*annuité* est le flux total versé chaque année par l'émetteur à l'ensemble des obligataires, c'est-à-dire la somme des intérêts et des flux éventuels de remboursement du principal.

Le remboursement de l'obligation peut être réalisé selon trois modalités principales différentes.
Le remboursement in fine : le remboursement est réalisé en une seule fois, le dernier jour de la durée de vie de l'obligation. A l'exception de la dernière année de vie de l'obligation, l'annuité n'est donc composée que des seuls intérêts versés chaque année par l'émetteur.
Le remboursement par séries ou par tranches annuelles égales : chaque année, une partie de l'emprunt est remboursée. Un même nombre de titres, tirés au sort, est remboursé chaque année. Le montant de l'annuité diminue avec le temps, puisque l'intérêt sur le capital restant dû diminue.

- Le remboursement par *annuités constantes* : l'annuité est constante. Aussi, puisque le montant de l'intérêt sur le capital restant dû diminue, l'émetteur rembourse chaque année (par tirage au sort), une part croissante du principal.

On distingue plusieurs catégories d'obligations qui répondent à des attentes différentes.

- **Les obligations ordinaires** sont des obligations à taux fixe dont le coupon versé en général une fois par an est identique sur toute la durée de vie du titre. Il est important de noter que ces titres sont particulièrement vulnérables au risque d'inflation en cas de variation des taux d'intérêt.

Prenons un exemple. Une obligation à 10 ans d'une valeur nominale de 1000 euros, remboursée au pair *in fine*, et ayant un taux facial de 10% rapporte chaque année 100 euros auxquels il faut rajouter le remboursement du principal (1000 euros) à l'issue de la $10^{ème}$ année. Imaginons que le détenteur de cette obligation souhaite la revendre sur le marché avant l'échéance, à un moment où le taux facial pratiqué sur les nouvelles émissions d'obligations est de 15%. Au taux du marché, une obligation de valeur nominale égale à 1000 euros rapporte chaque année 150 euros ; par conséquent, personne n'acceptera d'acheter 1000 euros un titre ne rapportant que 100 euros d'intérêt annuels. Pour revendre son titre, le détenteur de l'obligation doit consentir une baisse du prix de façon à ce que, pour l'acheteur, la rémunération soit identique à celle du marché, ici 15%. Le vendeur devra vendre son obligation au prix d'une obligation de nominal 667€.

Nous avons ainsi mis en évidence une relation décroissante entre le prix d'une obligation et le niveau des taux d'intérêt. Il en résulte pour l'acquéreur d'une obligation un risque de taux d'intérêt, c'est-à-dire une risque de moins-value à la revente en cas de hausse des taux. Ce risque est particulièrement sensible aux tensions inflationnistes, lesquelles peuvent être à l'origine d'une hausse des taux par les autorités monétaires. Pour pallier les défauts des obligations à taux fixe, plusieurs innovations ont vu le jour.

- Les obligations à taux flottant sont composées des obligations à taux variable et à taux révisable. Leur particularité est d'offrir une rémunération (taux d'intérêt) qui varie dans le temps en référence à une moyenne de taux constatés sur le marché. Les titres à taux révisable versent un intérêt périodique qui est calqué sur l'évolution récente des marchés alors que ceux à taux variables procurent une rémunération calculée comme une moyenne des conditions offertes par le marché jusqu'au jour de détachement du coupon.
- Les obligations indexées sont des titres dont la valeur de remboursement et/ou les intérêts sont liés à l'évolution d'un indice de référence. En particulier, le rendement de certains emprunts est calqué sur l'inflation. Ainsi, le Trésor français a procédé, pour la première fois en septembre 1998, à l'émission d'une OAT (Obligation Assimilable du Trésor) indexée sur l'inflation : l'OATi. Ce titre est une obligation à taux fixe dont tous les flux sont payés en appliquant un coefficient d'indexation égal à l'évolution de l'inflation entre la date initiale et la date de paiement du flux. L'OATi n'est dès lors sensible qu'à l'évolution des taux d'intérêt réels (taux d'intérêt nominaux moins taux d'inflation), historiquement plus stables que les taux d'intérêt nominaux. Ce produit financier offre donc une protection contre les risques d'inflation non anticipée et représente, de ce fait, l'actif actuellement le moins risqué sur le marché.

Comme pour les actions, existent dans la catégorie des obligations des **titres hybrides**, se situant en réalité à mi-chemin entre les obligations et les actions. Il s'agit par exemple des **obligations à bon de souscription d'obligation** (OBSO), des **obligations convertibles en actions** (OCA) ou des **titres participatifs**. Ces derniers sont assimilés à des quasi-fonds propres ; ils sont en principe non remboursables et procurent à leurs détenteurs une rémunération qui est pour partie fixe et pour partie variable indexée à un indicateur de performance de la société (chiffre d'affaires, résultat net…).

## 3. Autres produits échangés

Il existe d'autres produits échangés sur les marchés. Tout d'abord les matières premières comme l'or, le pétrole, les produits agro-alimentaires, etc.… D'autre part, il y les devises : euro, dollar, yen, etc.

Deux grands types de produits dont nous parlerons ultérieurement :

- Les produits de taux
- Les produits dérivés

## *C. Le marché Boursier*

Nous l'avons vu dans la fiche sur le rôle de la bourse, ce sont les sociétés de bourse qui sont le passage obligé de l'investissement en bourse car elles détiennent le monopole des transactions boursières. Jusqu'en 1988 c'étaient des officiers ministériels (les agents de change) qui détenaient ce monopole, cependant le crack de 1987 est venu modifier cette organisation et les agents de change se sont transformés en sociétés de bourse.

### 1. Les sociétés de Bourse

#### a) Euronext

Cette société a pour mission de veiller au bon déroulement de la cotation des valeurs, elle peut intervenir pour interrompre la cotation, notamment dans le cas d'irrégularités ou d'événements propres à engendrer une spéculation injustifiée (OPA, OPE,...). Une autre de ses missions et d'assurer le calcul et la cotation des indices (ex: CAC 40) ainsi que d'assurer la promotion de la place parisienne en France et à l'étranger.
Le 22/09/2000, les bourses d'Amsterdam, de Bruxelles et de Paris ont fusionné, créant une place financière transnationale baptisée Euronext. Le 06/02/2002, la bourse portugaise BVLP est pour sa part devenue Euronext Lisbonne, au même titre que « Euronext Paris, Euronext Amsterdam et Euronext Bruxelles ». Euronext constitue donc désormais un marché transfrontalier d'actions, d'obligations, de produits dérivés et de marchandises totalement intégré.
Euronext s'occupe des opérations de compensation du marché à terme et du marché des options négociables depuis la fusion avec MONEP et MATIF.

#### b) Le Conseil des Bourses de Valeurs (CBV)

Le CBV tient un rôle d'organisation et de réglementation du marché par le biais de règlements tels que: les conditions d'agrément des sociétés de bourses, les dispositions déontologiques, les modes d'admission ou de radiation à la côte...

#### c) La Commission des Opérations de Bourse (COB)

La COB a été créée en 1967 pour surveiller le marché, on entend d'ailleurs couramment dire qu'il s'agit du "gendarme de la bourse", c'est une autorité administrative indépendante dirigée par six membres. Ses trois principaux rôles sont la protection de l'épargne, l'information des investisseurs et la garantie du bon fonctionnement des négociations.
La COB dispose en outre d'un droit d'opposition à l'admission d'un titre ou d'un instrument financier sur un marché réglementé. Enfin elle dispose d'un pouvoir de sanction en cas d'infraction à ses règles.

#### d) L'autorité des marchés financiers (AMF)

Créée en 2003, l'AMF est issue de la fusion de plusieurs organismes :

- la Commission des opérations de bourse (COB) ;
- le Conseil des marchés financiers (CMF) ;
- le Conseil de discipline de la gestion financière (CDGF).

L'Autorité des marchés financiers est un organisme public indépendant qui a pour missions de veiller :

- à la protection de l'épargne investie dans les instruments financiers et tout autre placement donnant lieu à appel public à l'épargne ;
- à l'information des investisseurs ;
- au bon fonctionnement des marchés d'instruments financiers.

Ses principales compétences portent sur :

- Les opérations et l'information financières : l'AMF réglemente et contrôle l'ensemble des opérations financières portant sur des sociétés cotées : introductions en bourse,

augmentations de capital, offres publiques, fusions... et veille au bon déroulement des offres publiques boursières. Elle vérifie que les sociétés publient, en temps et en heure, une information complète et de qualité, délivrée de manière équitable à l'ensemble des acteurs.
- Les produits d'épargne collective: elle autorise la création de SICAV et de FCP. Elle vérifie notamment l'information figurant dans le prospectus simplifié de chaque produit qui doit être remis au client avant d'investir.
- Les marchés et leurs infrastructures : l'Autorité des marchés financiers définit les principes d'organisation et de fonctionnement des entreprises de marchés (comme Euronext Paris) et surveille les marchés et les transactions qui s'y déroulent.
- Les professionnels (établissements de crédit autorisés à fournir des services d'investissement, entreprises d'investissement, sociétés de gestion, conseillers en investissement financier, démarcheurs, etc.). L'AMF détermine les règles de bonne conduite et les obligations que doivent respecter les professionnels autorisés à fournir des services d'investissement ou des conseils en investissement.

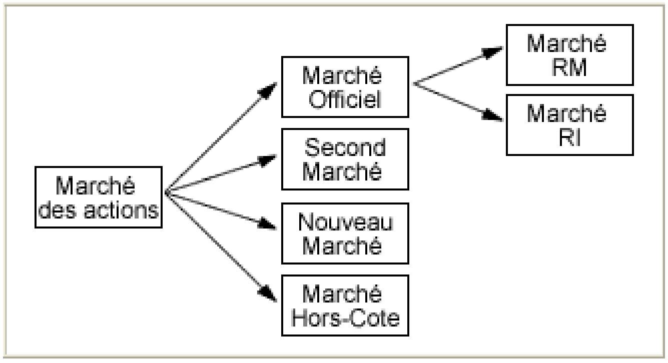
Le marché boursier est composé de deux compartiments : le compartiment action -ou marché des actions- et le compartiment obligations -ou marché des obligations.

## 2. Le marché des Obligations

Sur ce marché, on va distinguer le marché primaire et le marché secondaire. Le marché primaire est celui qui concerne les nouveaux emprunts émis par l'État, les collectivités locales et les entreprises, auxquels peuvent souscrire les particuliers. Le marché secondaire est le marché de l'occasion. C'est le marché sur lequel s'échangent les valeurs déjà émises. Il est tout autant accessible aux particuliers.

## 3. Le marché des Actions

Le marché Français des actions peut lui-même être subdivisé en plusieurs en sous éléments. On distingue :
- le marché officiel -ou cote officielle- comprenant le marché à Règlement mensuel -ou RM- et le marché au comptant ou à règlement immédiat -ou RI ;
- le second marché ;
- le nouveau marché ;
- le marché hors cote.




### a) Le marché officiel

Les entreprises souhaitant s'introduire sur le marché officiel doivent satisfaire à diverses conditions. Elles doivent entres autres :
- mettre à la disposition du public 25% au moins de leur capital;
- avoir versé un dividende au cours des trois derniers exercices, lesquels doivent avoir été bénéficiaires;

- avoir un chiffre d'affaires supérieur à 500 millions de francs;
- s'engager à publier régulièrement des informations.

### b) Le marché à règlement mensuel

C'est sur ce marché que sont cotées les actions des entreprises les plus importantes. Il s'agit d'un marché à terme. Il existe donc un délai entre la conclusion du contrat (achat et vente) et son exécution (livraison des titres et paiement). En effet, toutes les opérations effectuées au cours du mois sont dénouées le jour de liquidation (6ème jour de bourse). Le planning est le suivant :

- 1er jour de liquidation : liquidation générale de toutes les opérations réalisées pendant le mois boursier. Il marque la fin du mois boursier.
- 2eme jour de liquidation : il est procédé aux opérations de report. Il marque le début du mois boursier suivant.
- 3eme au 6eme jour de liquidation : livraisons des titres et règlements selon un calendrier fixé par la SBF.

Vous pouvez ainsi acheter une action de la société Alpha 100 Euros le 10 Mars et la revendre 110 € le 15 Mars sans constater de sortie d'argent sur votre compte en banque. Vous encaissez les 10 € de plus-value à la liquidation boursière. En d'autres termes, il n'y a pas de concordance entre le mois boursier et le mois calendaire et il est possible de vendre des actions que l'on ne possède pas.

Les opérations peuvent être dénouées de trois manières différentes:

- attendre la liquidation et procéder au règlement, en titres et en capitaux;
- effectuer, avant la date de liquidation, une opération en sens inverse (les spéculateurs à la hausse achète pour revendre).
- se faire reporter, c'est à dire demander à ce que le règlement et la livraison des titres s'effectue à la liquidation suivante (estimant que nos prévisions se réaliseront le mois suivant).

### c) Le marché au comptant (RI)

Sur ce marché, toutes les opérations sont réalisées au comptant.

### d) Le second marché

Ouvert en 1983, il est destiné à recevoir des entreprises de taille modeste mais dont les perspectives sont attrayantes. Les conditions d'admission sont moins restrictives que sur le Marché Officiel. Les entreprises souhaitant s'introduire au second Marché doivent satisfaire les critères suivants:

- mettre à la disposition du public 10% au moins du capital;
- présenter 2 années de comptes certifiés.

Les obligations d'information sont en revanche réduites.

### e) Le Nouveau Marché

Le Nouveau Marché, ouvert en février 1996, est un marché autonome, régie par une société propre : la société du Nouveau Marché (filiale de la SBF). Il s'adresse à des sociétés européennes, jeunes, innovatrices, à fort potentiel de croissance, qui ont un besoin de capitaux important pour se développer.

Les conditions d’admissions sont peu contraignantes, mais les sociétés candidates doivent respecter des règles strictes d’information. Le fonctionnement du Nouveau Marché est assuré par des intermédiaires financiers agrées par la société du Nouveau Marché :

- les introducteurs teneurs de marché assurent l’introduction des sociétés et la tenue du marché de leurs titres (cotation permanente des divers titres)
- les négociateurs courtiers : ils exécutent les ordres de leurs clients ou les leurs propres.
- les compensateurs : dénouent les opérations effectués.

### f) Le Marché Hors Cote

C’est un marché de moindre importance, réservé aux petites entreprises, ou à celles qui ont été rétrogradées du comptant ou du RM...
Il s’agit d’un marché étroit, c’est à dire que le volume des transactions y est faible. Les conditions d’admission sur ce marché y sont simples puisque n’importe quelle société peut y être admise à condition de présenter les trois derniers bilans.

### g) Les Marchés Dérivés

Il s'agit des marchés de produits dérivés dont font partie entre autre les contrat à terme et les options. De plus amples explications sont disponibles dans la description des produits traités sur les marchés.

# II. Notions de taux d'intérêt

## A. Introduction

Pour nous guider dans notre choix d'allocation, nous allons utiliser des modèles théoriques, reposant sur les principes de l'actualisation.

**Définition :** l'intérêt est le loyer de l'argent. Pour un consommateur, l'intérêt est le prix à payer pour la jouissance immédiate d'un bien de consommation (ex : automobile, appartement). Pour un épargnant, l'intérêt est la récompense pour la remise à plus tard de cette jouissance.

**Définition :** Le taux d'intérêt est la mesure du loyer. Son montant est le résultat d'offres et de demandes.

Ce taux est une fonction
- du temps (croissante)
- du risque (il y a un risque de contrepartie : l'emprunteur peut faire défaut. Le taux d'intérêt sera une fonction croissante du risque ; plus l'emprunteur fait prendre de risque, plus le taux est élevé)
- des conditions économiques en général (si le prêteur a possibilité de placer son argent à 4.5%, il n'acceptera pas de prêter à moins).

**La demande :** les demandeurs sont soit les particuliers pour des biens de consommation, soit des entreprises pour de l'investissement.

**L'offre :** les acteurs de l'offre sont les banques (et donc les individus !), les fonds de pension, etc.

## B. Intérêts simples et composés

L'intérêt simple est essentiellement utilisé pour des opérations à court terme (moins d'un an).

### 1. Intérêts simples

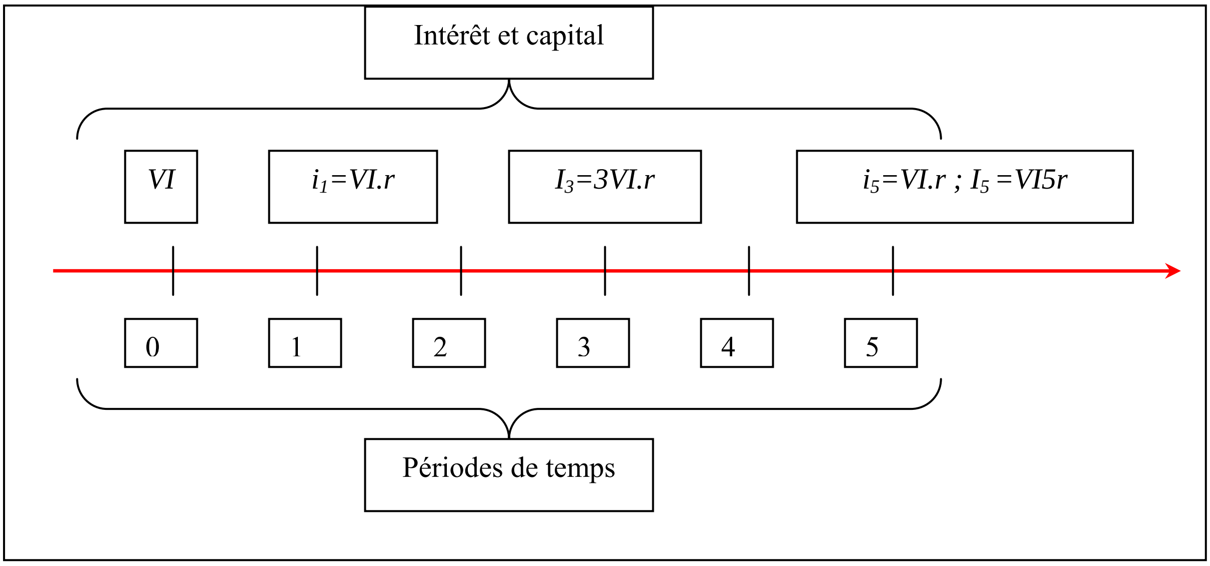
#### a) Définition

Notations :
- VI : le capital initial (somme prêtée ou empruntée),
- Vf : le capital final
- r : taux d'intérêt simple pour une période
- n : nombre de périodes (horizon du placement)
- $I_t$ : montant d'intérêt accumulé sur t périodes
- $i_t$ : montant d'intérêt pour la période t.

**Définition :** l'intérêt est dit simple lorsqu'il est calculé à chaque période seulement sur la base de la somme prêtée ou empruntée à l'origine.

Si les intérêts sont payés à la fin, le capital est $Vf = VI(1+nr)$

De plus $I_t = t \times r \times VI;\ i_t = r \times VI$




**Exercice** : on réalise un investissement de 350€. Le taux d'intérêt est fixé à 7%. La rémunération doit se faire sur 14 ans. Quel est l'intérêt versé sur la période 1 ? Quel est l'intérêt total à la période 12 ? Quel est le capital final ?

**Solution** : l'intérêt versé sur la période 1 est celui versé sur n'importe quelle période :

$$i_1 = rVI$$

donc $i_1 = 0,07 * 350 = 24,5€$

L'intérêt total à la période 12 :

$$I_{12} = 12 \times i_1 = 294€$$

Le capital final : $Vf = (1+nr)VI = (1+14\times 0,07)\times 350 = 693€$

**A vous** : Investissement = 12'435 ; taux d'intérêt = 4,5% ; horizon = 29 ans

**Exercice :** A quel taux annuel a été placé un capital de 20000€ ayant généré un intérêt de 2500€ après deux ans ?

**Solution :** le placement a rapporté 2500€ sur deux périodes donc, 1250€ sur une période. Ainsi, $20000 \times r = 1250 \Leftrightarrow r = 6,25\%$

D'une manière générale, lorsque l'on connaît trois des variables VF, VI, n, r, on peut déterminer la dernière.

n et r doivent être exprimés dans la même unité de temps. Généralement on parle de taux *annuel*. Pour les opérations à court terme, l'année est divisée en 360 jours, 24 quinzaines ou 12 mois.

**Exemple :**

| Taux annuel | Taux semestriel | Taux mensuel | Taux journalier |
|---|---|---|---|
| r | r/2 | r/12 | r/360 |
| 12% | 6% | 1% | 1/30% |

**A vous :** Quel est le montant de l'intérêt relatif à un placement d'un montant de 11000€ sur 162 jours ?

### b) Versement des intérêts à la fin ou au début

Quand les intérêts sont versés en début de période on parle de taux précomptés ou terme à échoir. Quand ils sont versés en fin de période, on parle de taux post-comptés ou terme échu. Le préteur préfère recevoir les intérêts en début de période et inversement pour l'emprunteur. Emprunter une somme VI pendant *n* périodes au taux **précompté** *r* implique le versement immédiat d'un intérêt qui vaut *n VI r*. La somme réellement à disposition de l'emprunteur est donc égale au capital emprunté *VI* moins les intérêts exigibles immédiatement. Les flux financiers en début et en fin de période sont

| | Début de période | Fin de période |
|---|---|---|
| **Capital** | *+VI* | *-VI* |
| **Intérêt** | *-n VI r* | |
| **Total** | *VI(1 – n r)* | *-VI* |

Considérons un autre emprunteur qui souhaite réaliser une opération à un taux d'intérêt **post-compté** *r'*, taux lui permettant d'encaisser et de décaisser les mêmes flux que le premier client. La somme empruntée est notée *VI'* et les intérêts versés en fin de la période *n* se montent à *n VI' r'*.

| | Début de période | Fin de période |
|---|---|---|
| **Capital** | *+VI'* | *-VI'* |
| **Intérêt** | | *-n VI' r'* |
| **Total** | *VI'* | *-VI'(1+n r')* |

L'égalité des deux séquences de flux donne :

$$\begin{cases} VI' = VI(1-nr) \\ -VI = -VI'(1+nr') \end{cases} \Leftrightarrow (1-nr)(1+nr') = 1 \Leftrightarrow nr' = \frac{1}{1-nr} - 1 = \frac{nr}{1-nr} \Leftrightarrow r' = \frac{r}{1-nr}$$

## 2. Opérations à court terme

### a) L'escompte commercial

On s'intéresse ici aux crédits à court terme banques - entreprises basés sur des créances clients (billets à ordre, traites, lettres de change, …). Un exemple de négociation d'un effet de commerce :

**Exemple :** Alpha vend le 8 février à son client Oméga pour 10 000 € (valeur nominale de l'effet) de marchandises. Date de règlement : 30 avril (échéance de l'effet). Le 10 mars, Alpha a besoin des 10 000 € qu'il emprunte à sa banque. En échange de ce prêt, il remet l'escompte (ou il négocie l'effet) à son banquier qui escompte l'effet. C'est-à-dire que Alpha donne à son banquier la créance qu'elle détient sur Oméga.
Mais le banquier ne consent à cette opération commerciale d'escompte que s'il bénéficie d'une rémunération appelée escompte commercial. Cet escompte commercial E est calculé avec les formules de l'intérêt simple (intérêt commercial).

$$E = V \times i_e \times \frac{n}{360}$$

Où

- $V$ est la valeur nominale de l'effet
- $i_e$ est le taux d'intérêt annuel du prêt
- $n$ est le nombre de jours séparant la date de remise à l'escompte de l'effet de la date d'échéance de ce même effet (il s'agit de la durée du prêt consenti par la banque).

Il s'agit d'une opération à ***intérêt précompté***.

**Définition :** On définit la ***valeur actuelle commercial :***

$$\boxed{a = V - E = V \times \left(1 - i_e \times \frac{n}{360}\right)}$$

Il s'agit de la somme effectivement prêtée.

***Définition :*** On appelle date d'équivalence de deux effets de commerce la date à laquelle les valeurs actuelles commerciales sont égales. A $E$, s'ajoutent différentes commissions proportionnelles ou non à la durée de l'effet (voire fixes pour toute opération de remise à l'escompte). Soit

- $i$ le taux de commission dépendant de la durée de l'effet ;
- $k$ le taux de commission indépendant de la durée de l'effet.

On définit l'agio hors taxe par :

$$AgioHT = V\left[i_e \frac{n}{360} + i \frac{n}{360} + k\right]$$

Le montant net de la négociation est donc : $V - AgioHT$

**Remarque :** on écrit $AgioHT = V \times \frac{n}{360}\left(i_e + i + k\frac{360}{n}\right)$ ce qui fait apparaître le taux réel d'escompte $i_e + i + k\frac{360}{n}$. Le taux effectif est donc $r = \frac{I}{1 - \frac{n}{360}I}$ où $I = i_e + i + \frac{360}{n} \times k$ puisqu'il s'agit d'une opération à intérêts précomptés.

Une autre technique de calcul est appelée escompte rationnel : l'intérêt s'applique dans ce cas non plus à la valeur nominale de l'effet mais à sa valeur actuelle, après déduction des intérêts **post-comptés** d'escompte.

L'escompte rationnel est : $E_r = (V - E_r) \times i_e \times \frac{n}{360}$, donc $E_r = \frac{Vi_e}{1 + \frac{n}{360}i_e}\frac{n}{360}$. Cet escompte est beaucoup moins utilisé.

**Exemple :** Un effet de 20000€ est escompté sur une durée de 60 jours au taux de 7% avec un taux de commission fixe à 0,2%. Quelle est la valeur de l'escompte commercial? Quel est le taux d'intérêt effectif ?

L'escompte commercial est $20000 \times \left(0,07 \times \frac{60}{360} + 0,002\right) = 273,33€$. La valeur actuelle nette est donc $20000 - 273,33 = 19726.7€$. Le taux effectif de l'escompte commercial est $I = 0,07 + 0,002 \times \frac{360}{60} = 8,2\%$ donc $r = \frac{I}{1 - nI} = 8,31\%$

### b) Le découvert

Le recours au découvert ou avance en compte courant se traduit par un compte débiteur. La banque accorde un plafond de découvert, négocié habituellement avec l'entreprise ou le particulier. Le grand avantage du découvert est sa souplesse d'utilisation. Le coût du découvert est affecté par :

- La commission de plus fort découvert, au taux de 0,05% par exemple, qui s'applique au plus fort solde débiteur mensuel

- Une commission de confirmation, parfois appliquée lorsque le découvert est confirmé par écrit par la banque. Dans ce cas, cette commission est de l'ordre de 1% du plafond autorisé.
- Les intérêts résultant de l'application du taux de découvert. Ils calculent sur la base des **nombres débiteurs :** il s'agit du produit du solde débiteur avec le nombre de jours pendant lesquels ce solde a été maintenu à un même niveau.

**Exemple :** Un particulier souffre d'un découvert de 100€ pendant 10 jours et de 30 € pendant 20 jours. Le taux de découvert est de 12% annuel. La commission de confirmation est de 1% du plafond (ici 200€) et la commission de plus fort découvert de 0,07%. Calculer les agios payés par ce particulier et le taux effectif.

- La commission de plus fort découvert sera de $0,07\% \times 100 = 0,07€$
- La commission de confirmation est de $0,01 \times 200 = 2€$
- Les intérêts $100 \times \frac{10}{360} \times 0,12 + 30 \times \frac{20}{360} \times 0,12 = 0,533€$

Le taux effectif sur un mois sera donc de $\frac{2,6033}{\left(\frac{100 \times 10 + 30 \times 20}{30}\right)} = 4,88\%$ contre $\frac{12\%}{12} = 1\%$ annoncé.

On voit que la commission de confirmation alourdie considérablement la charge.

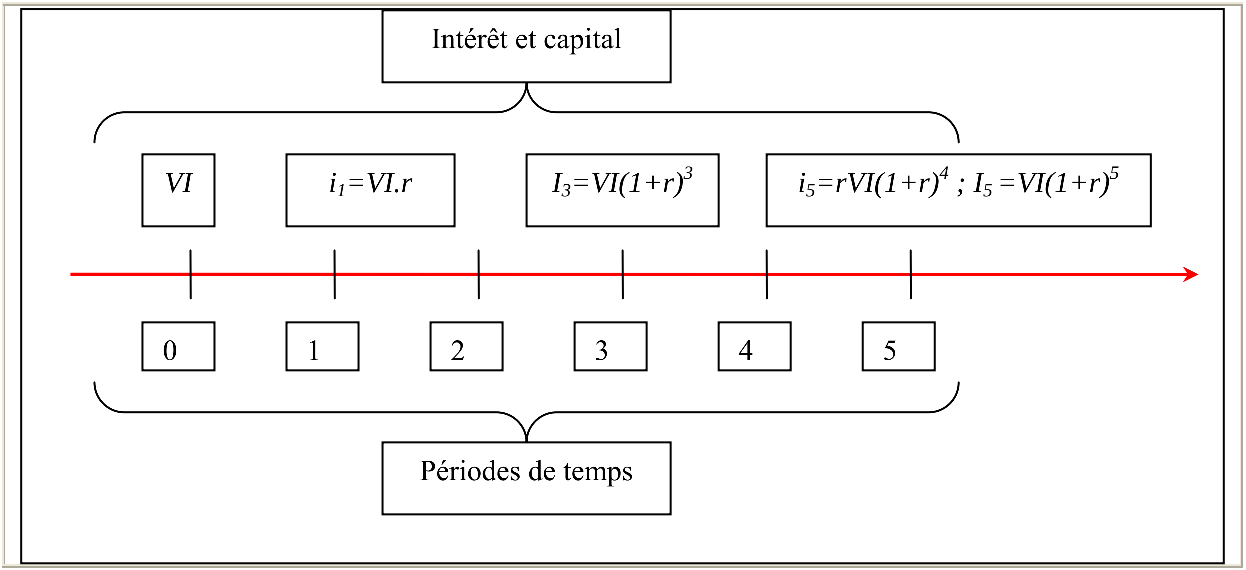
## 3. Intérêts composés

**Définition :** le taux d'intérêt est dit composé lorsqu'à la fin de chaque période l'intérêt s'ajoute au capital de début de période pour former la base de calcul de l'intérêt pour la période suivante. Le montant d'intérêt et le capital changent à chaque période

Une somme d'argent VI placée sur n périodes au taux d'intérêt composé r, génère la première année un intérêt égale à $VI \times r$ qui, s'il n'est pas immédiatement retiré, sera ajouté au capital investi la seconde période. Ainsi, au début de la deuxième période, le capital investi est de

$$V_1 = VI + VI \times r = VI(1+r)$$

A l'issu de cette période les intérêts se monteront donc à $VI(1+r)r$ . Plus généralement :




La valeur finale du capital est donc $Vf = (1+r)^n VI$. Contrairement à l'intérêt simple ou l'accroissement des montants est **linéaire,** l'intérêt composé a un accroissement **exponentiel**.

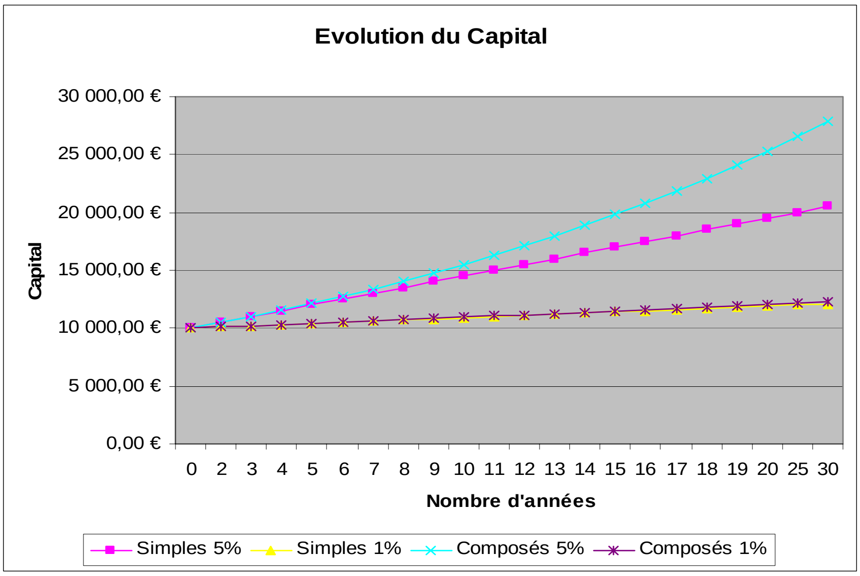
**Exercice :** quel est le capital au bout de 4 ans si on place 10000€ aujourd'hui au taux composé de 3.6% ?

**Solution :** On sait que $Vf = VI(1+r)^n$, donc ici $Vf = 10000 \times (1+0.036)^4 = 11934€$

**Exercice :** quel est le taux d'intérêt composé d'un placement ayant porté 10000€ à 18041.44€ en trois ans ?

**Solution :** On sait que $Vf = VI(1+r)^n$,

$1 + r = \sqrt[n]{Vf/VI} = \sqrt[3]{18044/10000} = 1{,}217$ et donc $r = 21.7\%$




Exemple de simulation d'épargne : taux simple contre taux composé.

## 4. La notion de capitalisation

L'intérêt composé est la règle :

**Définition :** la capitalisation indique la fréquence avec laquelle l'intérêt s'ajoute au capital en cas d'intérêts composés.

Question : avec quelle fréquence l'intérêt va s'ajouter au capital ?

- tous les ans : capitalisation annuelle
- tous les mois : capitalisation mensuelle
- tous les trimestres : capitalisation trimestrielle
- à chaque instant : capitalisation continue

## 5. Les types de taux :

### a) Taux périodique : $r_p$

**Définition** : le taux périodique est le taux correspondant à la période de capitalisation.

Par exemple vous placez 2000€ et dans 6 mois, vous avez accumulé 2200€, sachant que la capitalisation est semestrielle. Votre taux de rendement périodique est de :

$$\frac{2200-2000}{2000}=10\%$$

**Exercice :** vous placez 3600€ au taux périodique de 2,3% par trimestre durant 6 ans, combien allez vous accumuler ?

**Solution** : dans 6 ans il y 24 trimestres, donc $Vf = VI(1+r)^n = 3600(1+0.023)^{24} = 6213.23$

### b) Taux nominal annuel : $r_i$

**Définition :** le taux nominal est le taux périodique multiplié par le nombre de capitalisations par année : $r_i=r_p*k$ (k nombre de capitalisations).

**Exercice :** votre conseiller en placement vous recommande un investissement qui rapporterait un rendement annuel de 4% capitalisé par mois. Quel est le taux périodique ? Si vous placez 1000€ à ces conditions, combien aurez vous accumulé en 3 ans?

**Solution :** le taux périodique est le taux nominal annuel divisé par le nombre de capitalisations.

Ici, $r_p = 0.04/12 = 0.0033333$.

Ainsi, le capital final sera $Vf = VI(1+r_p)^{3k} = 1000(1+0.003333)^{36} = 1127.14$

### c) Taux effectif annuel : r

**Définition :** il s'agit du taux de rendement effectivement réalisé sur une année. Il est égal au taux périodique si la capitalisation est annuelle

Ne pas confondre taux effectif, qui correspond à la rentabilité effectivement réalisée, et taux réel, qui correspond au taux d'intérêt en termes réels, ce qui exclut les effets de l'inflation.

Les valeurs finales ne peuvent être calculées que sur la base de taux **effectifs**. Les taux nominaux ne sont qu'une convention.

### 6. Principe d'équivalence des taux

Les caractéristiques des produits financiers étant souvent très différentes, il est impossible de comparer des taux nominaux et effectifs.

**Base commune**
**Equivalence des taux : l'objectif est de les ramener à une même base.**

**Enoncé** : deux taux sont équivalents si, pour un placement initial identique, ils permettent d'obtenir la même valeur finale.

Exemple : quel est le taux annuel effectif correspondant à 2% périodique trimestriel ?

| | Taux annuel effectif | Taux périodique, capitalisation trimestrielle |
|---|---|---|
| **Taux** | $r$ | $r_p$ |
| **Capital initial** | $VI$ | $VI$ |
| **Capital final au bout d'un an** | $VI(1+r)$ | $VI(1+r_p)^4$ |

On voit donc que la relation entre les deux taux est

$r = (1+r_p)^k - 1$, où k est le nombre de capitalisations par an.

Plus généralement, les relations entre $r_p$, $r_i$, et r sont

$$\boxed{r = (1+r_p)^k \ ; \ r = \left(1+\frac{r_i}{k}\right)^k \ ; \ r_i = kr_p}$$

## C. Les taux sur les marchés

### 1. Les différents taux

| | | 3 novembre 2005 |
|---|---|---|
| **TAUX COURTS** | **EONIA (Euro Overnight Index Average = taux moyen pondéré en euros (TEMPÉ))**. C'est un taux calculé par la BCE (banque centrale européenne) qui résulte de la moyenne pondérée de toutes les transactions, au jour le jour des prêts non garantis réalisés par les banques commerciales, retenues pour le calcul de toutes les transactions de l'Euribor. C'est donc le taux effectif moyen auquel les banques du panel Euribor effectuent leurs transactions. | **2,07%** |
| | **EURIBOR** (European interbank offered rate) : taux | **1 semaine : 2,095%** |

| | | |
|---|---|---|
| | d'intérêt moyen offert entre banques du système bancaire européen. | **1 mois : 2,125%**<br>**1 an : 2,605%** |
| **TAUX LONGS** | **TME (taux moyen des emprunts d'État)** | **3,17%** |
| | **TMO (taux du marché obligataire)** est le taux moyen de rendement des emprunts obligataires à taux fixe garantis par l'État. | **???** |
| | **TAM (Taux annuel monétaire) :** Pour un mois donné le TAM est le taux de rendement d'un placement mensuel à intérêts composés, renouvelé chaque fin de mois, pendant les douze mois écoulés, à chacun des TMM | **???** |

**Taux directeurs :** ce sont les taux d'intérêt pratiqués par les banques centrales pour leurs opérations sur le marché monétaire. En Europe, ils sont au nombre de deux :

- Le taux des appels d'offres (bihebdomadaire), la banque centrale lance un appel d'offre auprès des banques commerciales et accorde les liquidités à l'établissement qui a fait l'offre la plus intéressante, c'est-à-dire le taux le plus élevé.
- Le taux des prises en pension de 5 à 10 jours qui permet aux banques centrales de se refinancer auprès de l'institut d'émission en logeant du papier commercial à court terme.

**Taux de base bancaire (TBB) ou prime rate :** Il est défini par chaque banque commerciale en fonction du coût moyen de ses ressources. Il faut toutefois remarquer que les principales banques s'alignent sur le même taux en raison de la concurrence. Théoriquement, c'est le taux que les banques commerciales appliquent à leurs meilleurs clients, c'est donc le tarif minimum proposé aux meilleurs clients. Il sert de référence pour le calcul des crédits accordés aux PME et, dans une moindre mesure, de certains prêts à la consommation. Il dépend donc du taux auquel les banques commerciales peuvent se refinancer sur le marché monétaire, taux auquel elles doivent ajouter une marge représentative de leurs coûts de gestion. Ainsi, la banque centrale européenne, la « Federal reserve board » ou encore la « bank of Japan », accordent des prêts aux banques en appliquant leurs taux directeurs.

**Taux réel** : il s'obtient en déduisant du taux nominal (celui qui est affiché) le taux d'inflation.

**TEG (taux effectif global)** : c'est le coût total d'un crédit pour l'emprunteur (taux d'intérêt plus frais de dossier, frais divers et assurance. Depuis 1966, ce taux doit obligatoirement figurer sur les contrats de crédit.

**Taux de l'usure** : il est déterminé chaque trimestre, à partir d'enquêtes statistiques effectuées par la banque de France. Le TEG est usuraire s'il dépasse 133 % du taux effectif moyen pratiqué au cours du trimestre précédent pour une catégorie de prêt donnée. Il existe un taux de l'usure à compter du 01 juillet 2002 pour les prêts aux particuliers

| **Prêts immobiliers** | | **Prêts à la consommation** | |
|---|---|---|---|
| Taux fixe | 5,30 % | Montant <1524 | 20,9% |
| Taux variable | 5 % | Découvert, prêt permanent, achat ou vente à tempérament > | 18 % |
| Prêts relais | 6,30 % | Prêts personnels ou assimilés > 1524€ | 9,55% |

**Taux bonifié :** Ce taux est inférieur à celui du marché grâce à une subvention accordée par les pouvoirs publics. Cette pratique était très répandue pendant les années 70, elle bénéficiait à l'agriculture, au logement et à certains secteurs industriels. Elle a été en très grande partie abandonnée à la fin des années 80. On peut cependant ranger dans cette catégorie le prêt à taux zéro qui bénéficie à certaines familles, sous conditions de ressources, pour favoriser leur accession à la propriété.

## 2. Comment se forment les taux ?

Il importe de distinguer les taux d'intérêt à long terme (a) et les taux d'intérêt à court terme (b). Partant de là, il faudra définir puis comprendre le rôle du taux de base bancaire (TBB) (c).

### a) Les taux longs

Ils expriment l'offre et la demande de capitaux en tenant compte des perspectives d'inflation. Quelqu'un qui prête de l'argent sur 5, 10 voire 30 ans veut voir son capital garanti contre l'érosion monétaire. La rémunération (le taux d'intérêt) doit rester positive. On dit que les taux longs sont "le juge de paix". D'une part, ils reflètent la santé économique d'un pays et d'autre part, ils sont influencés par les anticipations des agents économique, anticipations sur l'inflation certes, mais aussi sur la politique économique, voire sur la politique ; en bref, sur tout ce qui peut modifier les données de l'économie.
Évidemment, la nature de l'emprunteur influence aussi les taux. L'État, les entreprises publiques font courir moins de risques aux prêteurs qu'une entreprise ou qu'un particulier. C'est la raison pour laquelle les taux à long terme qui servent de référence sont, pour chaque pays, les taux des emprunts d'État (OAT). Normalement tous les autres taux sont plus élevés. C'est sur ce constat que se base l'"effet d'éviction", l'État emprunte à taux plus faibles, d'une part, et il draine l'épargne disponible, d'autre part, asséchant le marché financier et privant les entreprises du recours à ce type d'emprunt.

**Les taux d'intérêt à long terme sont déterminés par le marché financier**

### b) Les taux courts

Ils se forment de manière différente. Certes, sur le marché monétaire, l'offre et la demande de capitaux se confrontent, mais les acteurs ne sont pas les mêmes. Ce sont essentiellement des banques commerciales, des investisseurs institutionnels (assurances ou fonds de pension) et des grandes entreprises sous le contrôle de la banque centrale.
La banque centrale intervient sur le marché monétaire en injectant plus ou moins de monnaie centrale pour refinancer les banques commerciales qui, en fonction de leur activité de crédit bancaire, peuvent, temporairement manquer de monnaie centrale pour faire face aux retraits en liquide de leurs clients ou aux fuites de son propre réseau.
Logiquement, les taux courts doivent être inférieurs aux taux longs (de l'ordre de 2 à 3 points) puisque l'argent est engagé pour moins longtemps. Mais quand les banques centrales interviennent beaucoup, il peut se produire une "inversion des taux" (États-Unis d'Amérique en 2000), phénomène pervers qui consiste à mieux rémunérer l'argent placé à court terme que l'argent investi à long terme.
Il faut cependant noter que les placements à long terme prennent de plus en plus souvent la forme d'instruments financiers négociables, à court terme. Il s'agit de parts d'OPCVM (organismes de placement collectif de valeurs mobilières), c'est-à-dire de parts de sicav ou de fonds communs de placement.
**Les taux d'intérêt à court terme sont déterminés par la banque centrale (en Europe, la BCE).**

Celle-ci agit dans le cadre de sa politique monétaire, en fonction de considérations internes et externes.

| Au niveau interne, elle doit : | Au niveau externe, elle cherche à |
|---|---|
| en priorité (cf. ses statuts) : veiller à lutter contre l'inflation | maintenir un taux de change acceptable vis-à-vis du $ et du yen. |
| optimiser la croissance économique | |

| | |
|---|---|
| favoriser l'emploi | |

## 3. Le taux de base bancaire (TBB) ou prime rate

Comme nous l'avons vu ci-dessus, les particuliers n'ont pas accès aux marchés financiers. Pour placer leur argent ou pour emprunter, ils passent, généralement, par l'intermédiaire d'une banque. Le taux de base bancaire correspond alors au meilleur taux que chaque banque peut accorder à ses meilleurs clients. Les taux pratiqués vers les TPE, voire les PME-PMI et les particuliers sans garantie réelle ou personnelle sont plus élevés que le TBB. Les crédits les moins chers sont les crédits immobiliers à long terme parce que la banque peut prendre une sûreté réelle en hypothéquant le bien acheté. Les crédits les plus coûteux sont ceux ayant trait aux découverts bancaires et à certains crédits à la consommation, notamment les crédits renouvelables. Le taux de base bancaire s'applique à 4 % des crédits aux particuliers et à 15 % des prêts aux entreprises, principalement les crédits de trésorerie et d'équipement.

Mais comment la banque calcule-t-elle le taux d'intérêt ? Cela dépend avant tout du coût de revient de ses propres ressources. Jusqu'au milieu des années 80, la plus grande part de ces ressources était constituée par les dépôts à vue des clients (comptes-chèques). Aux frais de gestion près, il s'agissait d'une ressource bon marché. Mais les entreprises et les particuliers laissent de moins en moins d'argent "dormir sur leurs comptes-chèques", ils préfèrent les transférer sur des comptes qui rapportent des intérêts (livrets, PEL, PEA, sicav, FCP, etc.). Près des deux tiers des ressources des banques sont aujourd'hui rémunérées. Pour le reste, elles se refinancent sur le marché monétaire. Au coût de ce financement, la banque doit ajouter ses frais de fonctionnement et de gestion pour déterminer son taux de base.

# III. Actualisation et actuariat

A l'inverse de la capitalisation, notion qui permet de calculer des valeurs futurs à partir de valeurs présentes, on peut vouloir déterminer quelle somme doit être prêtée aujourd'hui pour obtenir un montant fixé à l'avance : c'est le principe de l'actualisation.

## A. *Principe d'actualisation*

### 1. Définitions

**Définition :** Une suite d'annuité est une suite de règlements réalisés à intervalles de temps égaux. Le terme d'annuités bien que parfois utilisé quelle que soit la périodicité des versements, est habituellement réservé à des périodicités annuelles. On parle sinon de semestrialités, mensualités, etc.

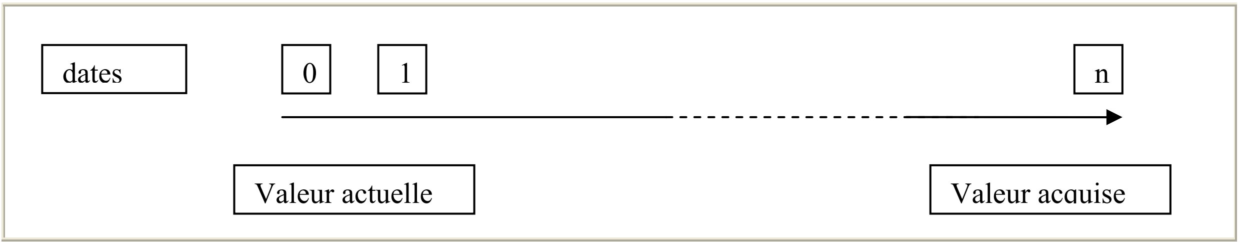
Cette suite d'annuité correspond à une rente pour celui qui la reçoit. On dit que la rente est *temporaire*, lorsqu'elle se compose d'un nombre fini d'annuités, *perpétuelle* sinon.
La rente est *à terme échu* si le premier versement intervient une période après l'origine. C'est le cas habituel. Elle est *immédiate* sinon.

**Exemples :**

- Un emprunt remboursé sur 10 ans par des mensualités constantes
- La constitution d'un capital par des versements réguliers
- L'acquisition d'une obligation d'une durée de vie de 6 ans qui verse des coupons annuels.

### 2. Valeurs acquises et valeurs actuelles d'une suite de flux financier.

Les mécanismes de calcul des valeurs acquises et des valeurs actuelles ne sont guère différentes : dans un cas c'est la valeur de la suite d'annuités à la fin des versements dans l'autre c'est sa valeur à l'origine.




#### a) Valeur actuelle d'une suite de flux financiers

##### *(1) Cas général*

**Définition :** la valeur actuelle d'un flux $F_p$ (flux dans *p* périodes) est $F_0$, où

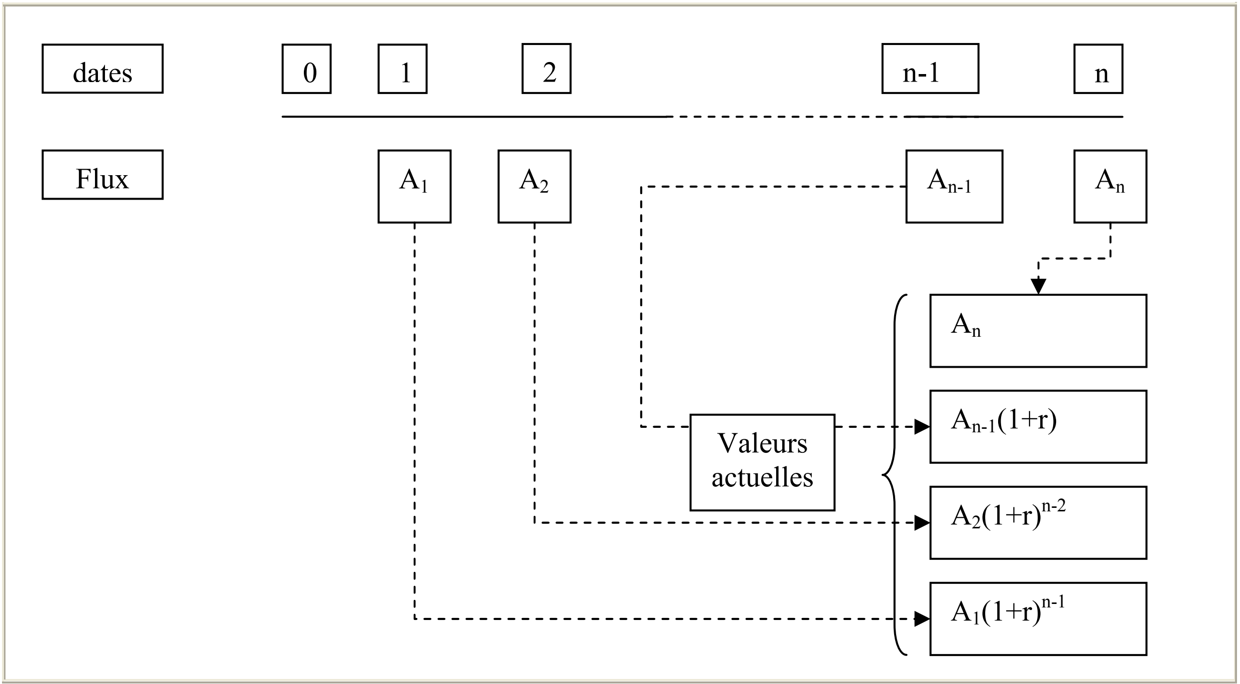
$$\boxed{F_0 = \frac{F_n}{(1+r)^n}}$$

**Définition :** la valeur actuelle d'une suite de *n* versements (flux de trésorerie) est la somme des valeurs actuelles par chacun des termes à l'origine de la suite

**Définition :** la valeur acquise par une suite de *n* versements (flux de trésorerie) est la somme des valeurs acquises par chacun des termes à la fin de la dernière période

Soient

- $V_n$ : la valeur acquise
- $V_0$ : la valeur actuelle
- $A_p$ : l'annuité (ou le flux de trésorerie) à la date *p*
- n : le nombre total de flux
- r : le taux d'intérêt (intérêt composé)




La valeur actuelle de cette suite est :

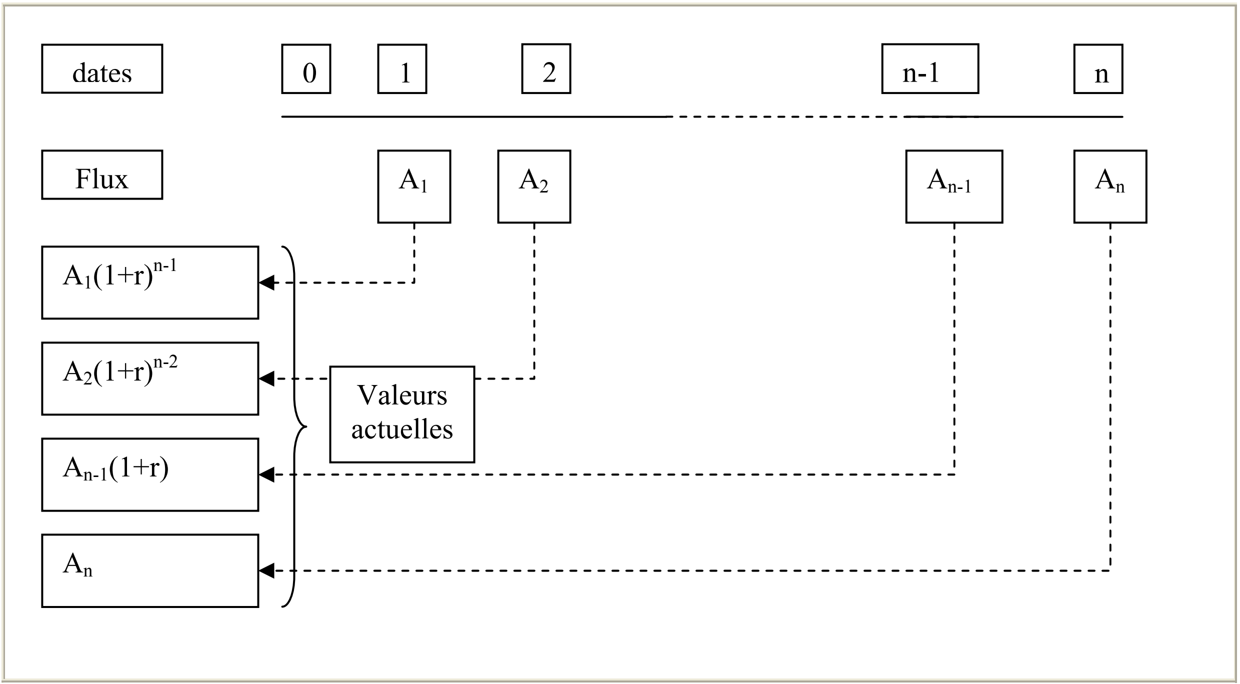
$$V_0 = A_1 \times (1+r)^{-1} + A_2 \times (1+r)^{-2} + \ldots + A_{n-1} \times (1+r)^{-n+1} + A_n \times (1+r)^{-n}$$

De même, sa valeur acquise est

$$V_n = A_1 \times (1+r)^{n-1} + A_2 \times (1+r)^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \times (1+r)^{1} + A_n$$

**Propriété :** Les valeurs actuelles et acquises d'une suite de *n* flux de trésorerie *Ap* au taux d'intérêt r sont

(1) $$V_n = \sum_{p=1}^{n} A_p (1+r)^{n-p} \quad et \quad V_0 = \sum_{p=1}^{n} A_p (1+r)^{-p}$$




On parlera de Valeur Actuelle Nette en présence d'un flux négatif à l'origine de la suite, en date 0 :

$$\boxed{V_n = A_0 + \sum_{p=1}^{n} A_p (1+r)^{-p} \qquad \text{où } A_0 < 0}$$

**Conséquence :** il existe une relation entre les valeurs acquises et actuelles :

(2) $$V_0 = \frac{V_n}{(1+r)^n}$$

### *(2) Cas d'annuités constantes*

Lorsque les flux sont tous égaux, l'expression (1) se simplifie facilement.

**Propriété :** Les valeurs actuelles et acquises d'une suite de *n* flux de trésorerie constants *A* au taux d'intérêt r sont

(3) $$V_n = A\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad et \qquad V_0 = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

**Exercice :** quelle somme doit-on placer aujourd'hui au taux de 12% pour obtenir dans trois ans 100000€ ?

**Solution :**

$$V_0 = \frac{100000}{(1.12)^3} = 71178{,}02€$$

**Exercice :** une banque accorde à une entreprise un prêt de 1000000€ au taux de 10% remboursable en 8 ans. Le remboursement se fait par annuités constantes. Calculer le montant de cette annuité.

**Solution :** la relation de base est fondée sur une égalité entre ce que la banque prête à la fin de l'année 0 et ce qu'elle reçoit en remboursement de la fin de la première année à la fin de la dernière année. Si on appelle A l'annuité constante, on a :

$$1\,000\,000 = V_0 \Leftrightarrow 1000000 = A\left(\sum_{p=1}^{8}\frac{1}{1.10^p}\right) \Leftrightarrow A = \frac{1000000}{\frac{1-1.10^{-8}}{0.10}} = 187444€$$

## B. Les choix d'investissement

### 1. Taux actuariel

**Définition :** on appelle taux d'actualisation, le taux d'intérêt utilisé pour calculer une valeur actuelle.

Telle qu'on l'a définie, la valeur actuelle ou présente d'une séquence de flux dépend du taux *r*. Il y a autant de valeurs actuelles que de taux d'actualisation.

**Définition :** le taux actuariel est le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle de l'ensemble des flux présents et futurs.

Mathématiquement,

$$\boxed{r^* / V_0\left(r^*\right) = A_0 + \ldots + \frac{A_n}{\left(1+r^*\right)^n} = 0}$$

Dans le cas où *A0* est de signe opposé à celui de *{A1,…,An}*, l'équation a une unique solution. Dans le cas où les flux financiers sont relatifs à une opération de prêt ou d'emprunt, ce taux est appelé taux de rendement actuariel ou (taux effectif global – TEG).

### 2. Comparaison VAN/TRI

L'investissement est un engagement durable de capital réalisé par une entreprise. D'un point de vue financier, l'investissement se traduit par une suite de flux :

- la dépense initiale
- les flux nets de trésorerie, différences entre les recettes et les dépenses générées durant chaque période par le projet
- éventuellement en fin de période une valeur résiduelle qui pourra être ajoutée au flux de la trésorerie de la dernière période.

Comment évaluer un investissement ? La réponse à cette question peut se faire en utilisant les techniques d'actualisation. Une méthode d'évaluation doit répondre à deux questions fondamentales :

- le projet d'investissement peut-il être accepté ?
- si deux projets sont en concurrence, lequel choisir ?

On note $\{A_0\ldots,A_n\}$ les flux liés à l'investissement et r le taux d'actualisation et on suppose que $A_0 < 0$ et $A_p \geq 0$, pour tous *p*.

#### a) La VAN : valeur nette actualisée

Rappel : la VAN(r) s'écrit

$$VAN(r) = A_0 + \sum_{p=1}^{n} \frac{A_p}{(1+r)^p}$$

La VAN représente la valeur aujourd'hui des flux du projet donc

- si VAN>0 le projet est retenu car il permet d'augmenter la richesse initiale
- si $VAN^1(r) < VAN^2(r)$, on retient le projet 2.

Toutefois, l'inconvénient est qu'il faut connaître le taux d'actualisation.

### b) Le TRI : taux de rentabilité interne

Le TRI est le taux pour lequel la VAN (r) est nulle. En fait, il correspond au taux actuariel. La décision de retenir ou non un projet va dépendre de la position du taux d'actualisation retenu et du taux de rentabilité interne. :

- TRI < Taux d'actualisation : projet rejeté.
- TRI > Taux d'actualisation : projet accepté car il permet de couvrir le coût des ressources.

Vu notre hypothèse sur les signes des A, la VAN est une fonction strictement décroissante du taux. On voit donc que les deux critères conduiront au même résultat dans le cas de projet unique (voir ci-dessous).
Dans le cas de deux projets, on choisit celui qui a le taux le plus élevé (plus il sera élevé, plus le taux d'actualisation a des chances d'être inférieur).

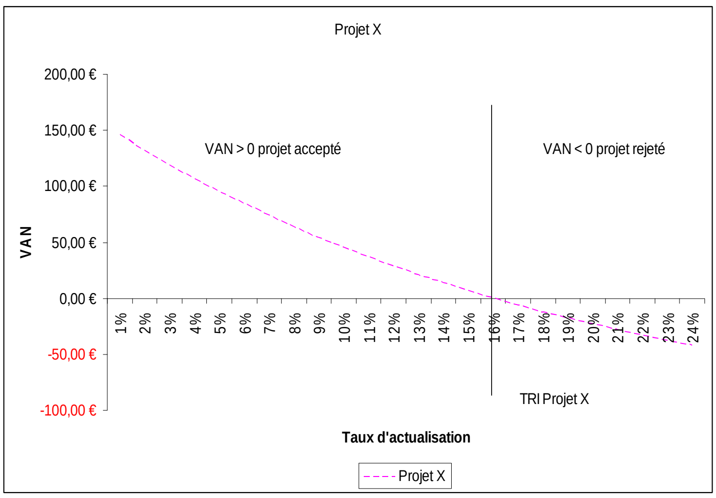
### c) Un exemple

Un investissement initial est de 400K€. Les flux de trésoreries sont donnés ci-dessous. Le taux d'actualisation retenu est de 10%.

| Années | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Flux | -400 | 170 | 140 | 130 | 120 |
| Facteur d'actualisation : $1.1^{-p}$ où p est le rang de l'année | | 0.909 | 0.826 | 0.751 | 0.683 |
| Flux actualisés | | 154,54 | 115,70 | 97,67 | 81,96 |

La VAN est alors

$$VAN = 154.54 + 115.7 + 97.67 + 81.96 - 400 = 49.88$$




Graphique montrant l'évolution de la VAN en fonction du taux. Le TRI est l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses.

Pour ce projet, les zones de rejet sont identiques .

La VAN est positive, donc le projet est accepté. Mais, si le taux augmente, la VAN peut devenir négative. Par exemple, si on considère un taux de 20% la VAN tombe à -28, ce qui entraîne un rejet du projet. Par ailleurs, le TRI est de 16,02%

### d) Conflits entre les critères

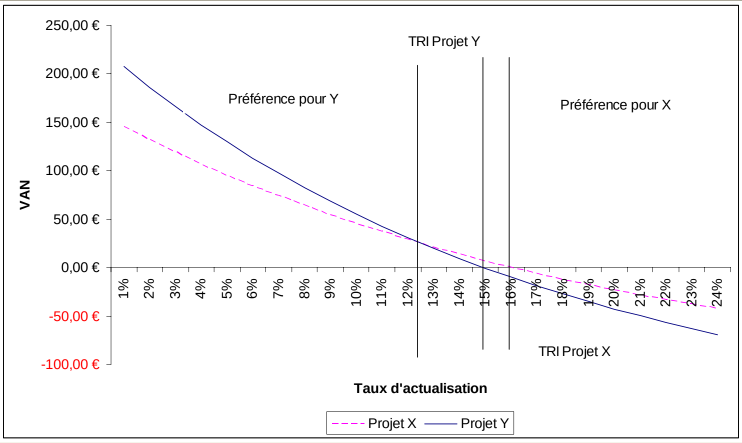
Les cas de conflits entre les critères interviennent deux projets et que l'on cherche à choisir le meilleur. Pour le critère VAN, celui qui aura la VAN la plus élevée sera privilégié. Pour le critère du TRI, c'est celui qui aura le taux de rentabilité interne qui sera choisit. Reprenons l'exemple ci-dessus :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Années | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Flux projet X | -400 | 170 | 140 | 130 | 120 |
| Flux projet Y | -400 | 30 | 80 | 180 | 340 |

Si on calcule les deux paramètres, on s'aperçoit que

| | **Projet X** | **Projet Y** |
|---|---|---|
| **VAN** | *49,8* | *60,8* |
| **TRI** | *16%* | *14,94%* |

Ainsi, le critère VAN tend à privilégier Y et le TRI favorise X. En fait on est dans une situation de ce type :




Le graphique ci-contre illustre les conflits entre les critères. On appelle *taux d'indifférence* le taux pour lequel les VAN sont égales. Ici, il vaut 12,66%.
Pour un taux d'actualisation supérieur, la VAN privilégie X et inversement.
Or les taux internes sont supérieurs à 12,66%, c'est pourquoi le TRI favorise X.

## C. *Les emprunts indivis*

Ce sont des emprunts non divisibles et contractés auprès d'un seul créancier. Ils s'opposent donc aux obligations où le nombre de créanciers est grand. En général, il s'agit d'emprunt effectué par des particuliers auprès des banques (bien de consommation, appartement, automobile) ou par des entreprises à la recherche de financement pour des investissements.

Pour chacun de ces emprunts, les clauses du contrat entre prêteur (créancier) et emprunteur (débiteur) précisent, entre autres, la durée de mise à disposition des fonds, le taux d'intérêt, les conditions de remboursement du capital emprunté.

Il existe différents modes de remboursement :

- In fine : l'emprunteur rembourse les intérêts à la fin de chaque annuité, et le capital à la fin de la dernière annuité.
- Amortissement constant : l'emprunteur rembourse une part constante du capital à chaque annuité plus les intérêts. Ceux-ci diminuent donc d'une annuité à l'autre.
- Annuité constante : le capital et les intérêts sont remboursés de façon à ce que les annuités (ou autre périodicité : mensualités, trimestrialités, …) soient constantes.

### a) Notations et conventions

On note

- $V_0$ : le capital emprunté
- n : la durée de l'emprunt
- r : le taux d'intérêt périodique (= taux nominal annuel si les périodes sont des annuités)
- $I_k$ : le montant des intérêts remboursé à la fin de la période k
- $D_k$ : la part de capital (on parle d'amortissement) remboursé durant la période k
- $A_k=D_k+I_k$ : le montant des versements périodiques (annuités si la période est l'année)
- $V_k$ : le capital dû en fin de période k

On connaît certaines relations entre ces différentes variables :

- les intérêts pour la période k sont dus par rapport au reste de capital à rembourser

(4) $$I_k = rV_{k-1}$$

- le capital du en fin de période k est celui du en fin de période k-1 moins l'amortissement en période k

(5) $$V_k = V_{k-1} - D_k$$

- le capital est complètement remboursé à la fin du prêt

(6) $$V_n = 0$$

- le montant du prêt est la somme des amortissements

(7) $$V_0 = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

- le montant du capital restant est la valeur actualisée des traites restant dues après la fin de la période k

(8) $$V_k = \frac{A_{k+1}}{1+r} + \ldots + \frac{A_n}{(1+r)^{n-k}}$$

**Définition :** on appelle coût global du crédit, la somme des intérêts :

(9) $$\text{Cout}=\sum_{k=1}^{n} I_k$$

### b) Illustration des trois méthodes de remboursement

#### *(1) Remboursement In fine*

L'emprunteur ne paie, à la fin de chaque période, que l'intérêt du capital emprunté. Il rembourse en une seule fois, à l'échéance de l'emprunt, l'intégralité du capital emprunté.

Le tableau d'amortissement va alors ressembler à ceci :

| k | Vk | Ik | Dk | Ak |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $V_0$ | $rV_0$ | *0* | $rV_0$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **…** | … | … | … | … |
| **n-1** | $V_0$ | $rV_0$ | $0$ | $rV_0$ |
| **n** | $0$ | $rV_0$ | $V_0$ | $V_0(1+r)$ |
| **Total** | | $nrV_0$ | $V_0$ | $V_0(1+nr)$ |

Cette méthode est essentiellement utilisée par les entreprises. En effet, elle a pour intérêt de laisser le capital disponible avec des charges constantes *rV0* de la période 1 à la période n-1.

Le coût d'un tel crédit est *nrV0*.

> **Exemple :** Une entreprise a un besoin de financement de 100000€ sur 4 ans. Le taux d'intérêt est de 4%. Dresser le tableau d'amortissement

| k | Vk | Ik | Dk | Ak |
|---|---|---|---|---|
| **1** | *100000* | *4000* | *0* | *4000* |
| **2** | *100000* | *4000* | *0* | *4000* |
| **3** | *100000* | *4000* | *0* | *4000* |
| **4** | *100000* | *4000* | *100000* | *104000* |
| **Total** | | *16000* | *100000* | *116000* |

### c) Amortissement constant

Le capital emprunté $V_0$ est remboursé en n périodes par amortissements égaux chacun à : $\frac{V_0}{n}$ (voir relation(7)). Décomposons deux périodes consécutives quelconques $A_{k-1}$ et $A_k$ :

- Comme l'amortissement est constant, on sait que

$$V_k = V_0 - \sum_{p=1}^{k} D_k = V_0 - \sum_{p=1}^{k} \frac{V_0}{n} = V_0\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

L'intérêt $I_k$ porte sur le capital du, donc

$$I_k = rV_{k-1} = rV_0\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

- La traite est donc (on peut remarquer qu'elle diminue)

$$A_k = I_k + D_k = rV_0\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\frac{V_0}{n} = \frac{V_0}{n}\left(1+r\left(n-k+1\right)\right)$$

- Le coût total du crédit est

$$Cout = \sum_{k=1}^{n} I_k = rV_0\left(n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\right) = rV_0\left(n-\frac{n-1}{2}\right) = rV_0\frac{n+1}{2}$$

Si on compare le coût d'un crédit de ce type avec celui d'un crédit In fine, on doit comparer $rV_0\frac{n+1}{2}$ et $nrV_0$. Or $n > \frac{n+1}{2}$ dès que n>1. Donc un crédit in fine est plus cher.

Le tableau d'amortissement est alors

| k | Vk | Ik | Dk | Ak |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $V_0\left(1-\frac{1}{n}\right)$ | $rV_0$ | $\frac{V_0}{n}$ | $\frac{V_0}{n}(1+nr)$ |
| **2** | $V_0\left(1-\frac{2}{n}\right)$ | $rV_0\left(1-\frac{1}{n}\right)$ | $\frac{V_0}{n}$ | $\frac{V_0}{n}(1+(n-1)r)$ |
| **…** | … | … | … | … |
| **n-1** | $V_0\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ | $rV_0\left(1-\frac{n-2}{n}\right)$ | $\frac{V_0}{n}$ | $\frac{V_0}{n}(1+2r)$ |
| **n** | *0* | $rV_0\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ | $\frac{V_0}{n}$ | $\frac{V_0}{n}(1+r)$ |
| **Total** | | $rV_0\frac{n+1}{2}$ | $V_0$ | $V_0\left(1+r\frac{n+1}{2}\right)$ |

### d) Annuités constantes

Ici, on connaît $A_k$ et il faut trouver les intérêts et l'amortissement. L'emprunteur paie, à la fin de chaque période, une annuité constante ($A_k$=A). Ce système, pratiqué par les établissements de crédit pour les prêts aux particuliers, présente l'avantage, pour l'emprunteur, d'un remboursement par sommes égales à un rythme régulier (la période pouvant être l'année, le semestre, le trimestre ou le plus souvent le mois).

La relation générale $V_0 = \frac{A_1}{1+r}+\ldots+\frac{A_n}{(1+r)^n}$ permet avec A constant de trouver

(10) $$A = V_0\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k}} = V_0\frac{1-\frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r}-\frac{1}{(1+r)^{n+1}}} = V_0\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} = V_0\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Ainsi, on peut trouver les valeurs restantes :

- ♦ On sait que le capital restant s'exprime en fonction des annuités par la relation (8) :

$$V_k = \frac{A}{1+r}+\ldots+\frac{A}{(1+r)^{n-k}} = \frac{A}{1+r}\frac{1-\frac{1}{(1+r)^{n-k}}}{1-\frac{1}{1+r}} = A\frac{1-(1+r)^{-(n-k)}}{r}$$

En remplaçant A par sa valeur on obtient

$$V_k = V_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-k)}}{1-(1+r)^{-n}}$$

- L'amortissement se calcule comme la différence de capital du (voir (5))

$$D_k = V_{k-1} - V_k = \frac{A}{1+r} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^{n-k+1}} - \left( \frac{A}{1+r} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^{n-k}} \right)$$
$$= \frac{A}{(1+r)^{n-k+1}} = \frac{rV_0}{(1+r)^{n-k+1}\left(1-(1+r)^{-n}\right)}$$

- Les intérêts s'obtiennent à partir du capital restant

$$I_k = rV_{k-1} = rV_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-k+1)}}{1-(1+r)^{-n}}$$

Le tableau d'amortissement est donc

| **k** | **Vk** | **Ik** | **Dk** | **Ak** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $V_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-1)}}{1-(1+r)^{-n}}$ | $rV_0$ | $\frac{rV_0}{(1+r)^n - 1}$ | $V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$ |
| … | … | … | … | … |
| **k** | $V_k = V_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-k)}}{1-(1+r)^{-n}}$ | $rV_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-k+1)}}{1-(1+r)^{-n}}$ | $\frac{rV_0}{(1+r)^{n-k+1}\left(1-(1+r)^{-n}\right)}$ | $V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$ |
| … | … | … | … | … |
| **n** | *0* | $\frac{V_0}{1+r} \times \frac{r^2}{1-(1+r)^{-n}}$ | $\frac{rV_0}{(1+r)\left(1-(1+r)^{-n}\right)}$ | $V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$ |
| **Total** | | $V_0 \left( \frac{nr}{1-(1+r)^{-n}} - 1 \right)$ | $V_0$ | $V_0 \frac{nr}{1-(1+r)^{-n}}$ |

Le coût total du crédit est donc

$$Cout = \sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{rV_0}{1-(1+r)^{-n}} \sum_{k=1}^{n} 1-(1+r)^{-(n-k+1)} = \frac{rV_0}{1-(1+r)^{-n}} \left( n - \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{-(n-k+1)} \right)$$
$$= \frac{rV_0}{1-(1+r)^{-n}} \left( n - \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \right) = V_0 \left( \frac{nr}{1-(1+r)^{-n}} - 1 \right)$$

Pour comparer au crédit à amortissement constant, il faut comparer cela à $rV_0 \frac{n+1}{2}$.

Si on reprend l'exemple de crédit In fine, on a le tableau

| **k** | **Vk** | **Ik** | **Dk** | **Ak** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | *100000* | *4000* | *23549* | *27549* |
| **2** | *76451* | *3058* | *24491* | *27549* |
| **3** | *51960* | *2078* | *25471* | *27549* |
| **4** | *26489* | *1060* | *26489* | *27549* |
| **Total** | | *10196* | *100000* | *110196* |

## *D. Les emprunts obligataires*

Un emprunt obligataire se différencie d'un emprunt indivis par la **présence de plusieurs prêteurs**. *Tout au long de cette partie, nous détaillerons en italique les caractéristiques d'un emprunt obligataire de BNP Paribas à titre d'exemple.*

### 1. Caractéristiques d'un emprunt obligataire

#### a) Définition

**L'emprunt obligataire** est un emprunt qui fait appel à de **nombreux prêteurs** (appelés obligataires ou souscripteurs), qui reçoivent, en échange des sommes prêtées, des titres (appelés obligations). Chaque titre est donc représentatif d'une quote-part d'emprunt et **fait l'objet d'une cotation en bourse**. L'émission de tels emprunts est évidement réservé aux plus grandes des sociétés et permet de **réunir des fonds importants**.
**Une obligation** est un titre de créance négociable représentant une fraction d'un emprunt à long terme émis par une collectivité (état, organisme public ou privé) et donnant à son possesseur le **droit de percevoir un intérêt le plus souvent annuel et d'être remboursé de son titre à l'échéance.**
Toute émission d'un emprunt obligataire fait l'objet d'une **note d'information** portant le visa de la Commission des Opérations de Bourse (COB) et publiée au Bulletin des Annonces Légales Obligatoires. Y sont mentionnés, entre autres :

- le nombre d'obligations émises
- la valeur nominale des obligations
- le taux nominal d'intérêt
- le prix d'émission
- la date de règlement des souscriptions
- la durée de l'emprunt
- la date de jouissance
- le prix de remboursement des obligations
- le système d'amortissement
- le taux de rendement actuariel brut au jour du règlement.

##### *(1) Valeur nominale (N)*

C'est la valeur qui sert de base au calcul des intérêts.
*N=1000 €*

##### *(2) Taux nominal d'intérêt (z)*

Inscrit dans le contrat d'émission, il sert à désigner l'emprunt et à calculer le montant du coupon. Il peut être fixe ou variable (le taux est alors déterminé à partir d'un taux de référence monétaire : TME -taux moyen mensuel des emprunts à long terme de l'état-, TMM -taux du marché monétaire-, TAM -taux annuel monétaire-, TIOP -taux interbancaire offert à Paris).
*Dans le cas de BNP z=4,25%.*

##### *(3) Le coupon (c)*

Le coupon (intérêt) est calculé en appliquant le taux d'intérêt nominal à la valeur nominale : c=N z.
*Dans le cas de BNP, c=N*z=1000*0,0425=42,5 €.*

**Définition :** une obligation qui ne verse pas de coupon est appelée **zéro-coupon.** Seul le nominal est reversé à échéance. Typiquement, les obligations à court terme (moins d'un an) sont des zéro-coupon.

Ces trois paramètres sont les plus importants. Mais, il existe d'autres caractéristiques d'une obligation qui permettent de les moduler :

- Prix d'émission (E) : c'est la somme effectivement prêtée par l'obligataire. L'obligation peut-être émise au pair (E=N), au-dessous (E<N), ou au-dessus du pair (E>N).

| Pour chaque exemple, indiquez : | | si l'obligation est émise au pair, au-dessus ou au-dessous du pair : |
|---|---|---|
| 1 | Valeur nominale N=1 000 €<br>Prix d'émission : 99,5% E=995 € | Obligation émise au dessous du pair (E<N). |
| 2 | Valeur nominale N=1 000 €<br>Prix d'émission / 100% E=1 000 € | Obligation émise au pair (E=N). |
| 3 | Valeur nominale N=1 000 €<br>Prix d'émission : 101% E=1 010 € | Obligation émise au dessus du pair (E>N). |

Remarque :
Pourquoi le prix d'émission n'est-il pas toujours égal à la valeur nominale ?
Pour que le lancement d'un emprunt obligataire soit un succès, il faut réussir à concilier 2 objectifs opposés. En effet, l'emprunteur souhaite emprunter au taux le plus bas et le prêteur attend le rendement le plus élevé possible.
L'équilibre entre ces 2 attitudes définit le niveau du marché, mesuré par un taux de rendement qui dépend de 2 variables : le taux d'intérêt et le prix d'émission.
Pour obtenir le taux de rendement le plus proche du marché, il faut :

- Soit offrir un taux d'intérêt nominal légèrement supérieur à celui du marché et augmenter le prix d'émission (qui est alors au-dessus du pair) ;
- Soit offrir un taux d'intérêt nominal plus faible à celui du marché et baisser le prix d'émission (qui est alors au-dessous du pair). Cette solution décourage l'investisseur et est peu adoptée.

*Dans le cas de BNP, le prix d'émission est de 101,291% soit 1000*101,291%=1012,91€*

- La date de règlement est le moment de départ de l'obligation.
- La durée de l'emprunt (n) correspond au délai entre la date d'émission et la date de remboursement. Pour BNP la date d'émission est le 27 juin 2003 et la date de remboursement le 27 juin 2015. La durée est donc de 12 ans.
- La date de jouissance est la date à partir de laquelle le titre porte intérêt. Dans la plupart des cas elle identique à la date de règlement. Dans l'exemple BNP la date de jouissance est le 27 juin 2003, soit la date de règlement ou d'émission.
- Prix de remboursement (R) est la somme payée versée par l'emprunteur lors du remboursement de l'obligation. Les obligations sont amorties par remboursement : soit au pair (R=N), soit au-dessus du pair (R>N). Dans ce dernier cas on parle de prime de remboursement. Cette prime est rare pour les obligations simples mais très fréquentes pour les obligations convertibles. Dans le cas de BNP, le remboursement est effectué au pair donc R=1000 €.
- Maturité ou durée de vie résiduelle est la moyenne pondérée des différentes durées de vie possibles.

### b) Modalité de remboursement

Le système d'amortissement est semblable à celui des emprunts indivis :

- (R1): Le montant de l'emprunt est égal à la somme des amortissements.
- (R2) : La dernière annuité est égale au dernier amortissement augmenté de son propre intérêt.
- (R3) : Le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités assurant le service de l'emprunt.
- (R4) : Le capital restant dû à la fin d'une période quelconque est égal à la valeur actuelle des annuités non échues.

Il existe deux modalités d'amortissement des emprunts obligataires.

- Remboursement par amortissement global "in fine" : c'*est le cas le plus courant. Réduction des frais de gestion.* Toutes les obligations sont amorties en bloc à la fin de l'emprunt. Chaque année, seuls les coupons sont payés pendant toute la durée de l'emprunt.
- Remboursement par annuités constantes : *Ancien système classique français, en désuétude.* La société émettrice verse à chaque période une somme constante (composée des coupons des obligations encore vivantes et du remboursement d'un certain nombre d'obligations tirées au sort). Au fur et à mesure du remboursement des obligations, les coupons à payer diminuent et le nombre d'obligations amorties est donc croissant

## 2. Valeur d'une obligation

### a) Arbitrage

L'arbitrage est une notion essentielle en finance. On donne ici un aperçu afin de valoriser les obligations mais nous développerons cette notion ultérieurement.

**Définition :** on dit qu'un marché présente une **opportunité d'arbitrage** (*arbitrage opportunity* ou *free lunch*) lorsque l'on peut mettre en œuvre une stratégie d'achat et de vente de différents titres qui ne coûte rien et rapporte des gains strictement positifs (aujourd'hui ou à une date future).

**Exemple :** Si sur un marché coexistaient au même prix de 99€ un zéro-coupon CHER à 6 mois de nominal 100€ et un autre zéro-coupon PASCHER de nominal 110€ il est clair que l'on pourrait s'enrichir facilement en mettant en œuvre la **stratégie d'arbitrage** suivante :

| Opération | aujourd'hui | 6 mois |
|---|---|---|
| **vente de CHER** | 99 € | -100 € |
| **achat de PASCHER** | -99 € | 110 € |
| **Total** | **0 (ne coûte rien)** | **+10 (gain >0)** |

Malheureusement (ou heureusement), en finance les arbres ne montent pas au ciel, de sorte que les opportunités d'arbitrage se comptent sur les doigts d'une main d'un mutilé de guerre. La plupart du temps, on fera l'hypothèse **d'absence d'opportunité d'arbitrage** (en abrégé **AOA**) sur les marchés financiers. En tout état de cause, une opportunité d'arbitrage ne peut se présenter que sur un laps de temps extrêmement court : si nous supposons que PASCHER et CHER coexistent au même prix, tous les acteur achèteraient PASCHER de sorte que son prix monterait et vendraient CHER de sorte que son prix baisserait.

Cette hypothèse va nous permettre d'entreprendre des raisonnements par arbitrage équivalents des raisonnements par l'absurde en mathématiques.

### b) Valorisation des obligations : une première approche

Considérons deux obligations émises par l'état français, de maturité 2 ans, et de même nominal 1000€ ; l'obligation A verse un coupon de 100€ chaque année tandis que l'obligation B verse un seul coupon de 1000€ au bout de la première année. Le tableau des cash flow de ces obligations est :

| Temps | 1 | 2 |
|---|---|---|
| **Cash Flow A** | 100 | 1100 |
| **Cash Flow B** | 1000 | 1000 |

Supposons que ces deux obligations aient un prix aujourd'hui (*t=0*) de 1000€ et 1735€ respectivement. Laquelle doit-on conseiller d'acheter ?
Les cash flow de ces obligations étant certains, nous pouvons recourir aux critères multi périodiques à savoir la VAN et le TRI.

- *La valeur actuelle nette*

En notant *r* le taux d'actualisation retenu (correspondant par exemple à l'exigence de rentabilité de l'acheteur) :

$$VAN_A = -1000 + \frac{100}{1+r} + \frac{1100}{(1+r)^2}$$

$$VAN_B = -1735 + \frac{1000}{1+r} + \frac{1000}{(1+r)^2}$$

On devrait donc conseiller d'acheter A si $VAN_A>0$ et *B* si $VAN_B>0$, en préférant *A* à *B* si et seulement si $VAN_A>VAN_B$. Mais ce critère simple, très utilisé en banque d'affaire pour évaluer *ponctuellement* un projet d'investissement, est en fait inadapté à la valorisation *continuelle* des obligations échangées sur un marché financier. En effet, à l'équilibre, les investisseurs ajustent tous leur exigence de rentabilité pour que la VAN soit nulle (car si il en était autrement, les investisseurs pour qui $VAN_A > 0$ achèteraient A, ceux pour qui $VAN_A<0$ vendraient, et ce jusqu'à ce que les uns et les autres se soient mis d'accord sur le juste prix, c'est-à-dire le prix qui les rend indifférents à acheter ou vendre A, c'est-à-dire le prix tel que $VAN_A=0$).
Ainsi, le taux *r* doit être tel que $VAN_A = VAN_B = 0$, ce qui rend le critère de la VAN quelque peu inefficace.

- *Le taux de rentabilité interne*

Il a le grand avantage de rendre la VAN nulle :

$$-1000 + \frac{100}{1+r_A} + \frac{1100}{(1+r_A)^2} = 0$$

$$-1735 + \frac{1000}{1+r_B} + \frac{1000}{(1+r_B)^2} = 0$$

On devrait conseiller d'acheter A plutôt que B si et seulement si $r_A > r_B$. Là encore, ce critère est rarement satisfaisant car si l'écart entre les deux rentabilités était conséquent, le mécanisme du marché l'estomperait rapidement ; dans cet exemple, on a même $r_A = r_B = 10\%$.

En fait ces deux critères supposent que le taux annuel *r* est constant dans le temps, autrement dit que l'on pourra réinvestir la deuxième année les intérêts de la première année au même taux *r*. Cette anticipation sur les taux futurs est loin d'être évidente, et c'est en tout cas faire pari risqué sur l'avenir, puisque rien n'empêche la Banque Centrale de modifier ses taux sans crier garde. Ce risque est appelé **risque de taux**, et induit le plus souvent une préférence des investisseurs pour les taux courts (à moins d'un an qui leur permettent de réagir plus vite aux variations de taux).

### c) Courbe des taux par terme. Prix de non arbitrage

#### *(1) Exemple introductif*

Supposons que sur le marché obligataire américain existent deux obligations A et B de maturité  ans, ainsi que deux zéro-coupons C et D de maturité un et deux ans respectivement. Le tableau suivant résume leurs caractéristiques :

| | Prix | t=1 | t=2 |
|---|---|---|---|
| **A** | 1 000 € | 100 € | 1 100 € |
| **B** | 1 735 € | 1 000 € | 1 000 € |
| **C** | 95 € | 100 € | - |
| **D** | 80 € | - | 100 € |

Dans cette situation, on peut **répliquer** l'obligation A en constituant un portefeuille **A'** contenant un zéro-coupon C et onze zéro-coupons D. Le prix à payer pour se constituer ce portefeuille est de : $1 \times 95 + 11 \times 80 = 975€$ , soit 25€ de moins que l'obligation alors que les cash flows sont identiques.

| | Quantité | Prix unitaire | t=1 | t=2 |
|---|---|---|---|---|
| **C** | 1 | 95 € | 100 € | - |
| **D** | 11 | 80 € | - | 1 100 € |
| **A** | | 975 € | 100 € | 1 100 € |

De même on montre que l'obligation B peut être répliquée par dix zéro-coupons C et dix zéro-coupons D. Le prix de ce portefeuille est de 1750€. Cette obligation est sous cotée de 15€. Dans ce marché il existe donc des opportunités d'arbitrage !

La présence des zéro-coupons sur le marché fournit donc un moyen simple de savoir si les obligations sont sous ou sur cotée, et ce indépendamment de la personnalité des investisseurs. Si l'on fait le raisonnement inverse, on dispose d'un moyen de valoriser les emprunts obligataires.

#### *(2) La courbe des taux par terme*

Considérons un zéro-coupon d'échéance *T* et de nominal *N*, de prix $p_r$ sur le marché. Par définition, le taux de rentabilité *à échéance T* de ce titre est :

$$r_T = \frac{N - p_T}{p_T}$$

Deux taux de rentabilité ne sont comparables que s'ils portent sur la même période. Il est donc naturel de définir le taux annuel de rentabilité du zéro-coupon :

$$z(T) = \left(1 + r_T\right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\frac{N}{p_R}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Si l'on dispose de suffisamment de zéro-coupons sur le marché, on peut alors construire la courbe de *z*, qui est appelée **courbe des zéro-coupons par terme**, ou encore *courbe des taux purs*, ou plus simplement **courbe des taux zéros** (« **zéro-rate curve** »).
On distingue trois grands cas de figure :

- La courbe est plate, i.e. $z \equiv z_0$ (où $z_0$ est une constante). Il s'agit en fait d'un cas d'école, qui revient à supposer qu'il existe un taux d'intérêt constant dans le temps, et qui ne se rencontre pas dans la pratique ;
- La courbe est croissante. C'est le cas le plus courant : plus l'échéance est éloignée, plus le risque de taux est important, donc plus le marché exige une rentabilité élevée ;
- La courbe est décroissante. On observe ce phénomène lorsque le marché anticipe une baisse des taux.

### *(3) Prix de non arbitrage*

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix de marché $P_{AOA}$ de tout titre financier versant une suite de *n cash flows* certains $(F_t)$ aux échéances futures $t_1, t_2, ..., t_n$ doit être égal à la valeur actuelle du titre, en choisissant pour taux d'actualisation les taux zéro-coupons à échéances $t_1, t_2, ..., t_n$ :

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{\left(1+z(t_i)\right)^{t_i}}$$

La preuve de cette formule est à retenir car elle met en œuvre un raisonnement par arbitrage. Pour simplifier, on suppose que *n=3*, et que les flux sont annuels. On désigne par *X, Y, Z* les zéro-coupons à un, deux et trois ans respectivement, et par A le titre en question. On peut également supposer sans perte de généralité que *X, Y* et *Z* ont tous un nominal de 1. Le prix de *Y*, par exemple, est alors de : $\frac{1}{\left(1+z(2)\right)^2}$. Supposons que $P_{AOA} > \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{\left(1+z(t_i)\right)^{t_i}}$. On peut alors mettre en œuvre la stratégie suivante :

| Opération | T=0 | T=1 | T=2 | T=3 |
|---|---|---|---|---|
| **Acheter $F_1$ titres X** | $-F_1 \times \frac{1}{1+z(1)}$ | $+F_1$ | | |
| **Acheter $F_2$ titres Y** | $-F_2 \times \frac{1}{1+z(2)}$ | | $+F_2$ | |
| **Acheter $F_3$ titres Z** | $-F_3 \times \frac{1}{1+z(3)}$ | | | $+F_3$ |
| **Vendre A** | $+P_A$ | $-F_1$ | $-F_2$ | $-F_3$ |
| **Total** | **>0 par hypothèse** | **0** | **0** | **0** |

Supposons que $P_{AOA} < \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{\left(1+z(t_i)\right)^{t_i}}$. En renversant les opérations et signes du tableau précédent, on montre également que cette supposition entraîne une opportunité d'arbitrage.

En conclusion, par absence d'opportunités d'arbitrage, les deux suppositions précédentes sont fausses, ce qui prouve la formule : $P_{AOA} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{\left(1+z(t_i)\right)^{t_i}}$.

## d) Cotation en bourse

Les obligations sont cotées en pourcentage de leur valeur nominale *au pied du coupon* (c'est à dire coupon couru non compris). Le coupon couru (montant des intérêts courus de la dernière échéance au jour de la cotation) est également exprimé en pourcentage de la valeur nominale et varie chaque jour de 1/365$^{\text{ème}}$ du coupon annuel.

Pour déterminer le prix que paie l'acheteur d'une obligation en bourse, il faut ajouter au cours de l'obligation le montant du coupon couru.

**Exemple:**
Combien doit payer l'acheteur d'une obligation SNCF 8% ?

Séance du 28 septembre 1995

| Libellé | Valeur nominale | Coupon couru en % | Cours du jour en % |
|---|---|---|---|
| SNCF 8% 95-07 | 5 000 F | 2,798 | 101,50 |

L'acheteur devra payer (prix de l'obligation + coupon couru) :

$$(5\ 000*1{,}015) + (5\ 000*0.02798)=5\ 214{,}90F$$

# IV. Les produits dérivés

## A. Présentation des produits dérivés

### 1. Définition

Un produit dérivé est un produit financier, qui s'achète et se vend, et qui **est toujours bâti sur la base d'un autre produit financier**. Ce dernier est appelé « **sous-jacent** » du produit dérivé. Ceux-ci peuvent être :

- Des actions
- Des obligations
- Des devises
- Des matières premières : or, pétrole, blé, etc.
- Des … produits dérivés !

L'utilisation des produits dérivés est réservée aux professionnels intervenant sur les marchés financiers. Par professionnels, on entend

- Les opérateurs des banques et société de courtage
- Les trésoriers d'entreprise
- Les gestionnaires de fond de pension, SICAV…
- Les gestionnaires de collectivités locales dont le budget dépasse quelques millions d'euros…

Les produits dérivés sont utilisés pour la gestion des risques financiers :

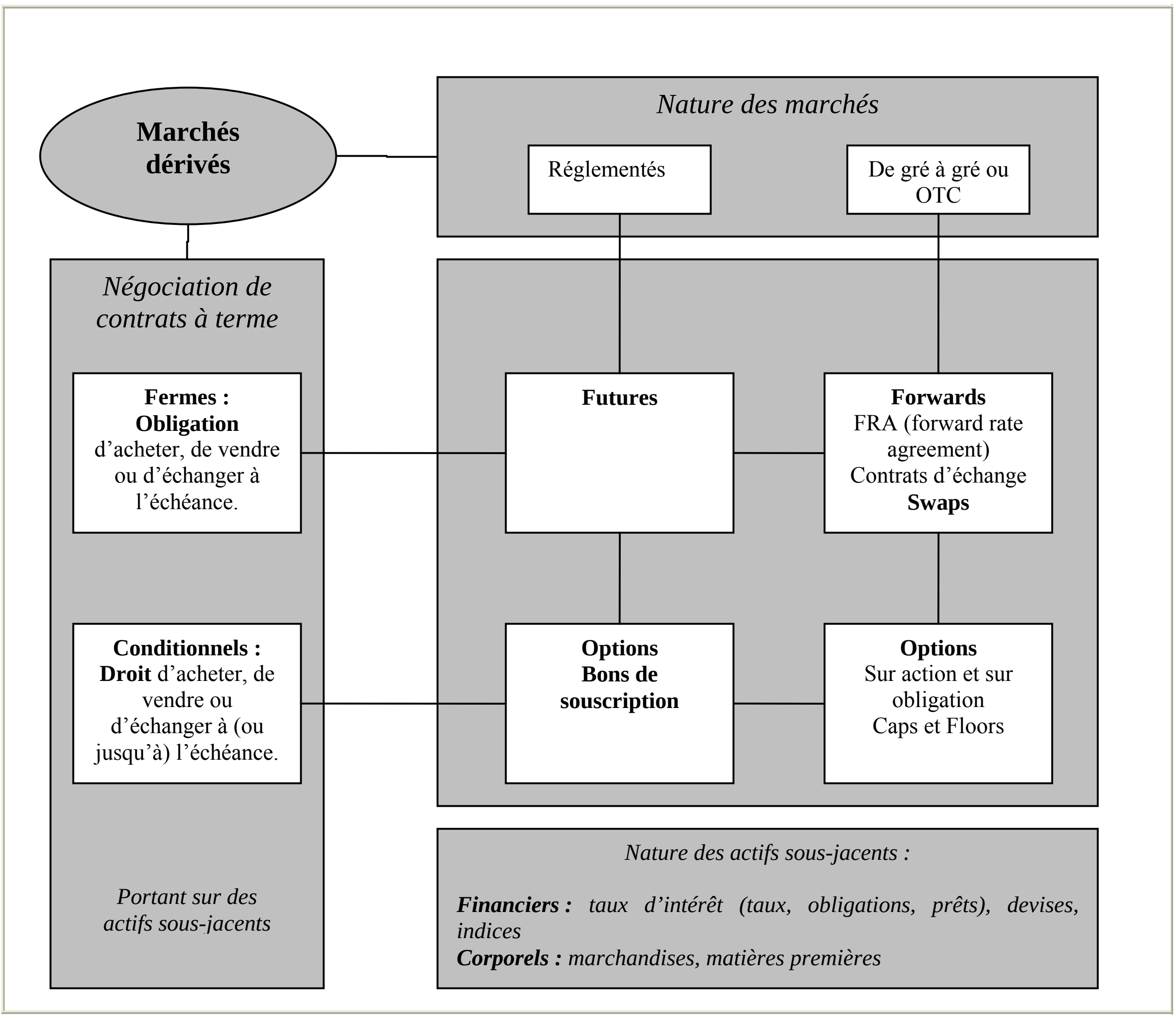
- Ils permettent de prendre des risques (spéculateur)
- Ou de se couvrir contre les risques (hedger : se prémunir ou « se couvrir » contre les risques existant).

#### a) Historique des produits dérivés

Les produits dérivés ne datent pas du XX$^{ème}$ siècle. L'exemple historique majeure est la hollande du XVII$^{ème}$ qui proposait un marché d'options sur la tulipe. En effet, un hiver rigoureux impliquait une récolte moyenne et une hausse des cours et inversement. Voulant se prémunir contre une baisse des cours et voulant stabiliser leurs revenus les producteurs ont cherché une solution financière. A l'inverse les négociants désireux de s'enrichir, proposèrent aux producteurs des options qui leur conféraient le droit de vendre leurs productions de bulbes à des prix prédéterminés. Cette expérience innovante n'allait cependant pas durer

Après un hiver particulièrement doux, le cours du bulbe s'effondra. Les producteurs usèrent massivement de leurs options, et les négociants ne purent pas faire face. Une analyse postérieure a montré que la faillite de ce marché s'explique par la sous-estimation de la prime de l'option. En fait, il fallu attendre 1973, pour que deux américains, Black et Scholes proposent un modèle mathématiques pour l'évaluation des options.

### b) Les marchés des produits dérivés




Il existe deux grandes catégories de produits dérivés :

## 2. Les contrats à terme

Ce type de contrat est symétrique, c'est-à-dire que chaque contrepartie a autant de chance de gagner ou de perdre de l'argent.

**Définition :** un contrat à terme est un contrat d'achat ou de vente d'un produit financier, passé entre deux contreparties, dont toutes les caractéristiques sont fixées à l'avance : date de règlement, prix à terme, etc. Le prix conclu est appelé **cours à terme**, et l'échange se fera à ce prix quelque soit le cours du marché à la date de livraison.

Deux types d'exécution peuvent se produire :

- « Physical settlement » le sous-jacent est effectivement échangé.
- « cash settlement » : si le cours du sous-jacent est en dessous du prix fixé, l'acheteur se fournit sur le marché et verse la différence au vendeur et inversement.

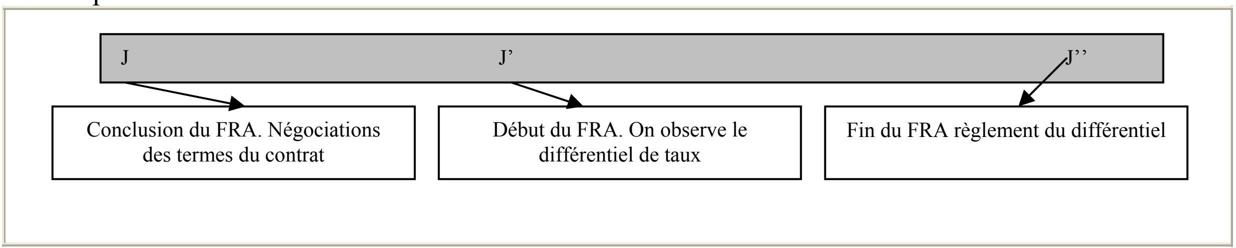
Exemple : futurs, forward, swap…

### a) Le FRA

Le FRA est un contrat un terme qui permet de garantir immédiatement un taux d'intérêt futur. Le FRA comporte 2 périodes :

**Une période d'attente :** pendant cette période, il ne se passe rien. L'une ou l'autre des contreparties a toute latitude pour déboucler ou non son opération par quelque arbitrage que ce soit.

**Une période garantie** : c'est sur cette période que porte la garantie de taux. Au départ de cette période, on comparera le taux garanti avec son équivalent (en terme de période) sur le marché. La différence sera réglée d'avance (donc actualisée) par l'une des contreparties. Le taux d'un FRA est donc bien un taux **In Fine**, ce qui simplifie les comparaisons et calculs par rapport au taux de dépôt classiques.




**Exemple :** une entreprise sait qu'elle doit emprunter dans 5 mois 10 millions d'euros pour 3 mois. Elle sait qu'elle pourra emprunter au taux EURIBOR 3 mois +0,3% (actuellement à 2,159%) **mais constaté 5 mois plus tard.** Son risque est donc de voir le taux monté pendant les 5 mois à venir.
Elle couvre son risque en achetant un FRA (forward rate agreement) qui lui assure un taux de 2,2% par exemple. Ce FRA a une durée de 3 mois et un départ dans 5 mois. On suppose que l'on a des intérêts simples.

**5mois plus tard**

**Cas 1 :** le taux est inférieur à 2,2%, par exemple à 2%. L'entreprise doit alors payer à la banque vendeuse du FRA

$$10\,millions \times \left( \underbrace{0{,}022}_{\text{exécution du FRA}} - \underbrace{0{,}02}_{\text{achat sur le marché}} \right) \times \frac{90\ jours}{360} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{0{,}02\times 90}{360}}}_{\text{taux d'actualisation sur la durée du FRA}} = 4975€$$

De plus, elle doit payer des intérêts à la banque qui lui fait le prêt :

$$10\,millions \times \frac{90\ jours}{360} \times \frac{2+0{,}3}{100} = 57500€$$

Soit un total de 57500+4975=62475€

**Cas 2 :** le taux est supérieur à 2,2%, par exemple à 2,4%. La banque vendeuse du FRA verse à l'entreprise

$$10\,millions \times \left( \underbrace{0{,}024}_{\text{achat sur le marché}} - \underbrace{0{,}022}_{\text{exécution du FRA}} \right) \times \frac{90\ jours}{360} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{0{,}024\times 90}{360}}}_{\text{taux d'actualisation sur la durée du FRA}} = 4970€$$

L'entreprise doit payer des intérêts à la banque qui lui fait le prêt :

$$10\,millions \times \frac{90\ jours}{360} \times \frac{2{,}4+0{,}3}{100} = 67500€$$

Soit un total de 67500-4970=62530€

**Résumé : en achetant le FRA l'entreprise a gelé le coût de son crédit.** La légère différence vient du fait que les intérêts de l'emprunt sont payés à la fin des trois mois alors que le différentiel du FRA est payé au début.
L'inconvénient est que le vendeur ou l'acheteur renonce au gain dû à une variation de taux en leur faveur.

De manière générale, on note

- $N$ le nominal, c'est-à-dire le montant sur lequel porte l'emprunt.
- $T$ la **durée** de la période de garantie exprimé en année.
- $K$ le taux fixé par le contrat (taux annuel).
- $X$ le taux observé sur le marché au début de la période de garantie (taux annuel).

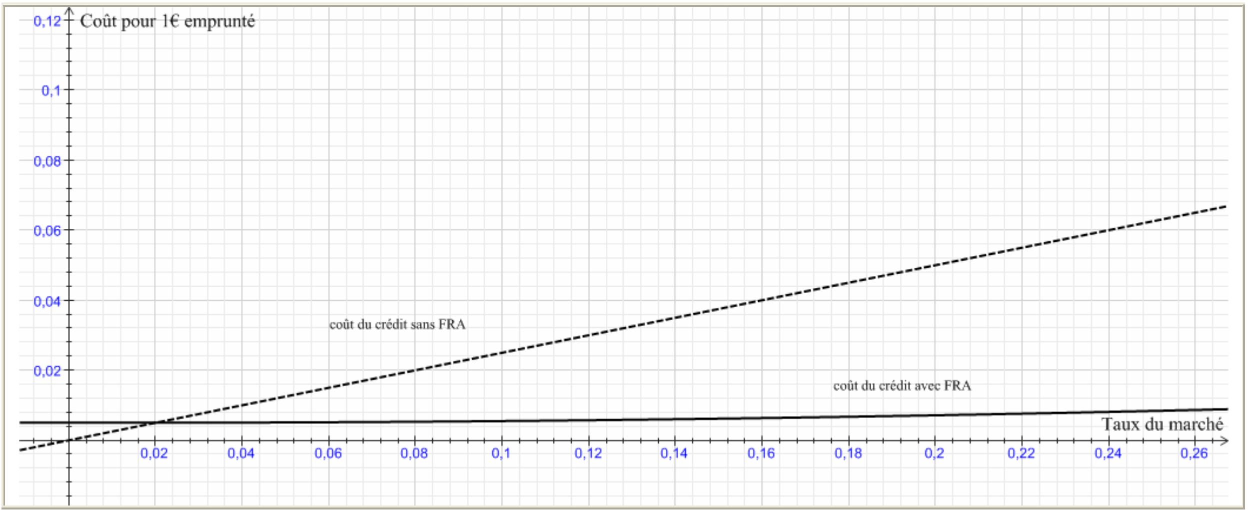
Dans le cas d'intérêts simples :
L'exécution du FRA induit pour son acheteur coût égal à

$$N\times(K-X)\times T\times\frac{1}{1+XT}$$

Ce montant est positif si $K>X$ ; l'acheteur du FRA perd de l'argent si le taux du marché est inférieur au taux garanti et inversement.
L'emprunt coûte à l'acheteur $NXT$ . L'acheteur du FRA dépense :

$$NXT+\frac{NT(K-X)}{1+XT}=NKT+NXT-\frac{NXT+NKXT^2}{1+XT}=N\left(KT+XT^2\frac{X-K}{1+XT}\right)$$

Si on trace la fonction qui à $X$ associe $KT+XT^2\dfrac{X-K}{1+XT}$ avec $K=2\%$ et $T=0.25$ on obtient :




On observe que cette fonction est quasiment constante sur $[0;0.3]$. Le prix du crédit est donc bien gelé.

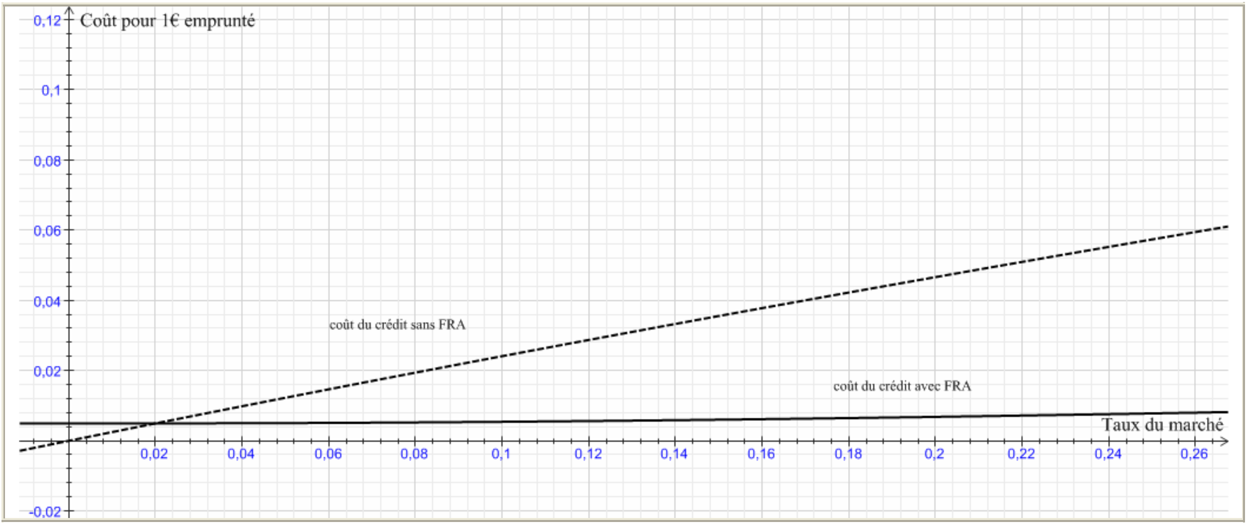
Dans le cas d'intérêts composés :
L'exécution du FRA induit pour son acheteur coût égal à

$$N\times\left[(1+K)^T-(1+X)^T\right]\times\frac{1}{(1+X)^T}$$

Ce montant est positif si $K>X$ ; l'acheteur du FRA perd de l'argent si le taux du marché est inférieur au taux garanti et inversement.
L'emprunt coûte à l'acheteur $N\left[(1+X)^T-1\right]$. L'acheteur du FRA dépense :

$$N(1+X)^T - N + \frac{N}{(1+X)^T}\left[(1+K)^T - (1+X)^T\right] = N\left[(1+K)^T - 1\right] + N\left[(1+X)^T - 1\right]\frac{(1+X)^T - (1+K)^T}{(1+X)^T}$$

Si on trace la fonction qui à *X* associe $(1+K)^T - 1 + \left[(1+X)^T - 1\right]\frac{(1+X)^T - (1+K)^T}{(1+X)^T}$ avec *K=2%* et *T=0.25* on obtient :




On observe que cette fonction est quasiment constante sur $[0;0.3]$. Le prix du crédit est donc bien gelé.

### b) Les futures et les forward

Les contrats futures sont des contrats à terme standardisés que l'on traite en bourse, tandis que les forward sont des contrats à terme traités de gré à gré. Du fait des dispositifs de sécurité spécifiques aux marchés réglementés, on observe des différences de prix plus ou moins significatives entre ces deux catégories, notamment sur le long terme. Dans ce cours, on supposera néanmoins que les prix des forward et des futures sont identiques.

Un contrat doit faire référence à :

- Le rôle de chaque intervenant (acheteur ou vendeur)
- Une référence officielle de marché (actions, indices, obligations, marché de changes, taux d'intérêt, etc.) dont le prix au temps *t* est noté $S_t$
- La date future de relevé de cette référence : *T*
- Le prix du contrat à terme : *K*
- Le montant notionnel sur lequel porte la transaction du contrat à terme : c'est la quantité de sous-jacent échangée : *N* (mais on supposera que $N=1$)
- Les instructions de paiement (cash settlement, physical settlement)

#### *(1) Profil de gain (payoff)*

On se place ordinairement du point de vue de l'acheteur à terme, étant entendu que le monde dans lequel vit le vendeur est symétrique. Ainsi, si $FC_t$ est la valeur du contrat à la date *t* pour l'acheteur à terme, du point de vue du vendeur à terme la valeur est $-FC_t$.

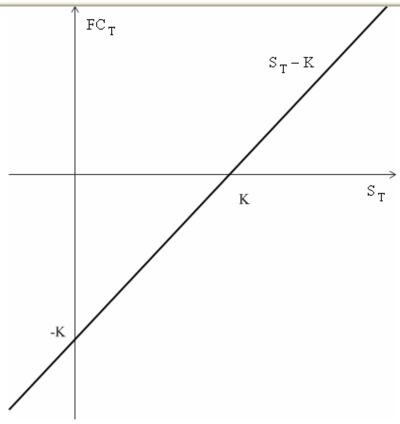
A l'échéance, le **profil de gain ou payoff** du contrat est :

$$FC_T = S_T - K$$

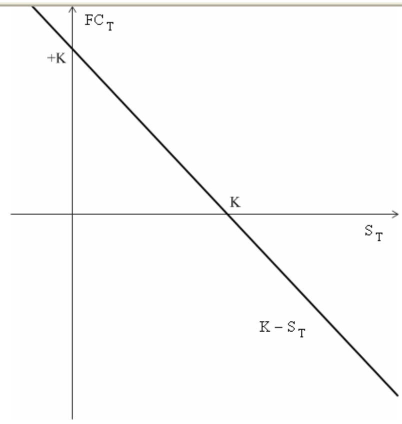
Cette valeur correspond tout simplement aux pertes ou profits latents :

| | |
|---|---|
| Achat d'une unité de sous-jacent au prix de livraison *K* (en exécution du contrat) | $-K$ |
| Valeur d'une unité de sous-jacent au prix du marché $S_T$ | $+S_T$ |
| Payoff | $S_T - K$ |

Pour le vendeur le payoff est $-FC_T = K - S_T$




Profil de gain de l'acheteur d'un contrat à terme à $t = T$




Profil de gain du vendeur d'un contrat à terme à $t = T$

### *(2) Valorisation des contrats à terme*

On s'intéresse à présent à la valeur $FC_t$ du contrat à d'autres instants $t < T$, et notamment à la valeur $FC_0$ aujourd'hui. Les trois hypothèses suivantes forment le cadre le plus simple qui soit pour valoriser un contrat à terme :

- ♦ L'actif sous-jacent ne produit pas de revenu (tels que des dividendes sur action ou des coupons pour une obligation) ;
- ♦ Tous les investisseurs peuvent prêter et emprunter de l'argent à échéance *T* au taux annuel sans risque *r* ;
- ♦ Il y a absence d'opportunités d'arbitrage sur les marchés.

Théorème : la valeur aujourd'hui de non arbitrage d'un contrat d'achat à terme est alors :

$$FC_0 = S_0 - \frac{K}{(1+r)^T}$$

Supposons en effet, que $FC_0 > S_0 - \frac{K}{(1+r)^T}$, ou encore $FC_0 + \frac{K}{(1+r)^T} > S_0$. On peut alors mettre en œuvre la stratégie d'arbitrage suivante :

| Opération | Flux de trésorerie à t=0 | Flux de trésorerie à t=T |
|---|---|---|
| Achat aujourd'hui du sous-jacent | $-S_0$ | |
| Vente aujourd'hui du contrat à terme | $+FC_0$ | $-FC_T = K - S_T$ |
| Emprunt de $K/(1+r)^T$ au taux *r*, remboursé à l'échéance *T* | $+\frac{K}{(1+r)^T}$ | $-\left[\frac{K}{(1+r)^T}\right](1+r)^T = -K$ |
| Vente à échéance *T* du sous-jacent | | $+S_T$ |
| Solde des opérations | $FC_0 - S_0 + \frac{K}{(1+r)^T} > 0$ | 0 |

Notons qu'une telle stratégie est sans risque car on possède le sous-jacent au moment de sa revente à terme.

Supposons à présent que $FC_0 < S_0 - \frac{K}{(1+r)^T}$, ou encore $S_0 > FC_0 + \frac{K}{(1+r)^T}$. On peut alors mettre en œuvre la stratégie d'arbitrage suivante :

| Opération | Flux de trésorerie à t=0 | Flux de trésorerie à t=T |
|---|---|---|
| Vente aujourd'hui du sous-jacent | $+S_0$ | |
| Achat aujourd'hui du contrat à terme | $-FC_0$ | $+FC_T = S_T - K$ |
| Placement de $K/(1+r)^T$ au taux *r*, remboursé à l'échéance *T* | $-\frac{K}{(1+r)^T}$ | $+\left[\frac{K}{(1+r)^T}\right](1+r)^T = +K$ |
| Achat à échéance *T* du sous-jacent | | $-S_T$ |
| Solde des opérations | $S_0 - FC_0 - \frac{K}{(1+r)^T} > 0$ | 0 |

Notons qu'une telle stratégie, où l'on vend le sous-jacent dès aujourd'hui, n'est possible que si le marché autorise la vente à découvert (c'est le cas dans la plupart des marchés).

Si on calcule $FC_t$ pour n'importe quel temps t<T, on obtient :

$$FC_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

#### (3) *Prix à terme*

La formule de valorisation d'un contrat à terme ne dépend que de quatre paramètres : $S_0, K, T$ et $r$. On a vu au début de ce paragraphe que dans les contrats à terme, il est d'usage que les signataires ne s'échangent aucun flux financier, ce qui revient à dire que le contrat a une valeur nulle au moment de la signature. Comment cela est-il possible ? En fixant le prix de livraison *K* de telle sorte que $S_0 - \frac{K}{(1+r)^T} = 0$, i.e. : $K = S_0(1+r)^T$.

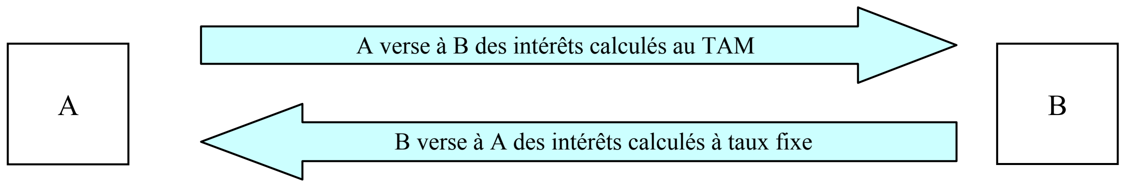
Ce prix est appelé **prix à terme** (**forward price**) du sous-jacent à l'échéance *T*. Il s'agit d'un prix anticipé fixé aujourd'hui, contrairement à $S_T$ qui est le prix à la date t=T ( et que l'on ne connaît pas à l'avance). Le prix forward est souvent noté $F_0$ ou $F(0,T)$.

### c) Les swaps

#### (1) *Définition*

**Définition :** le swap de taux d'intérêt est un **contrat de gré à gré** par lequel deux parties conviennent de s'échanger, à date fixe, des flux d'intérêts d'un capital, **intérêts calculés sur des références de taux.**

**Accord de Swap taux variable TAM contre taux fixe**




Seul le différentiel d'intérêt est payé, le capital **n'est jamais versé.** En réalité, les entreprises A et B n'ont jamais de relation directe. Deux banques servent d'intermédiaire :
Adossés à des emprunts ou prêts, les swaps de taux transforment :

- Un endettement ou placement à taux fixe en un endettement ou placement à taux variable et inversement
- Un endettement ou placement à taux variable en un endettement ou placement à un autre taux variable et inversement

### *(2) Utilisation des swaps*

Les swaps permettent

- D'**améliorer les conditions de taux** d'un emprunt ou d'un placement, en cours de négociation
- De **gérer le risque de taux d'intérêt** sur un emprunt ou un placement existant, voire de **modifier la structure de taux du bilan.**

**Exemple :** une entreprise A souhaite lancer un emprunt obligataire de 500M€ remboursable in fine dans 5 ans. Compte tenu de sa notation, le taux de l'emprunt pourrait être de 6,5% à taux fixe ou TAM+0,8% à taux variable. L'entreprise préfère s'endetter à **taux fixe**
Parallèlement, une entreprise B cherche 500M€ de ressources à même échéance. Elle peut s'endetter à 5,5% à taux fixe ou TAM+0,7% à taux variable. Elle préfère à **taux variable.**
Sur le marché de gré à gré on côte Swap à cinq ans contre TAM: 5,2 ; 5,3%. Cela signifie qu'une entreprise qui désire payer le TAM recevra 5,2%, recevoir le TAM paiera 5,3%
La différence entre les deux taux correspond à la marge bancaire.

L'entreprise A va :

- S'endetter au taux variable de TAM+0,8%
- Selon l'accord de swap, verser des intérêts à 5,3% et recevoir des intérêts à TAM

L'entreprise B va :

- S'endetter à taux fixe de 5,5%
- Selon l'accord de swap, verser des intérêts à TAM et recevoir des intérêts à 5,2%

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **A** | **Banques** | **B** |
| **Sans swap de taux**<br>A s'endette à taux fixe, B à taux variable | **6,5%** | | **TAM + 0,7%** |
| **Avec swap de taux**<br>A s'endette à taux variable, B s'endette à taux fixe **(2)** | TAM +0,8% | | 5,5% |
| L'accord de swap prévoit que chaque année pendant 5 ans, | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A versera les intérêts à taux fixe, **(3)** | 5,3% | -5,3% | |
| B les recevra, amputés de la marge bancaire **(3)** | | 5,2% | -5,2% |
| | | | |
| B versera les intérêts à taux variable **(4)** | | -TAM | TAM |
| A les recevra **(4)** | -TAM | TAM | |
| **Coût global résultant du swap** | **6,1%** | **-0,1%** | **TAM 0,3%** |

Le swap de taux d'intérêt peut également permettre d'anticiper des variations de taux :

| Anticipation | Position initiale | Swap à réaliser | Position finale |
|---|---|---|---|
| **Hausse des taux** | Endettement à taux variable | Verse le taux fixe et reçoit le taux variable | Endettement taux fixe |
| | Placement taux fixe | | Placement taux variable |
| **Baisse des taux** | Endettement taux fixe | Verse le taux variable et reçoit le taux fixe | Endettement à taux variable |
| | Placement taux variable | | Placement taux fixe |

#### *(3) Lien swap/FRA*

Un exemple : soit un swap de 2 ans sur l'EURIBOR 3mois contre taux fixe aux mêmes dates. Le swap va consister en l'échange de 8 flux financiers (2ans / 3 mois = 8 échéances) qui correspondent chacun à un contrat à terme sur l'EURIBOR 3 mois.

## 3. Les options

### a) Définition

**Définition :** une option est un contrat qui confère à son acheteur le **droit** et **non l'obligation** d'acheter ou de vendre jusqu'à une certaine date appelée **date d'échéance** un actif sous jacent, à un prix fixé dès la conclusion du contrat appelé **prix d'exercice,** en contrepartie du **versement immédiat d'une prime au vendeur.**

On distingue les **options d'achat** (call) et les **options de vente** (put).

| **Option d'achat ou call** | | | | **Option de vente ou Put** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Transaction initiale* | | *Droits et Obligations nés du contrat* | | *Transaction initiale* | | *Droits et Obligations nés du contrat* |
| Acheteur | ⟶ | **Droit d'acheter** | | Acheteur | ⟶ | **Droit de vendre** |
| Vendeur | ⟶ | **Engagement de vendre** à la demande de l'acheteur du call | | Vendeur | ⟶ | **Engagement d'acheter** à la demande de l'acheteur du put |

### b) Catégories d'options

Les options classiques sont de deux types :
**Européennes :** l'acheteur ne peut exercer son droit **qu'à l'échéance.**
**Américaines :** l'acheteur peut exercer son droit **à tout moment entre la date de création de l'option et la date d'échéance.** Option plus souple mais aussi plus coûteuse que l'option européenne.

Parallèlement aux options classiques, apparaissent depuis les années 90, sur les marchés de gré à gré, des options dites « **exotiques** » :

- Les options **asiatiques**, dont le prix d'exercice à l'échéance est fonction de la moyenne des cours du sous-jacent enregistrés durant la durée de vie de l'option.
- Les options **lookbacks**, dont le prix d'exercice à l'échéance est fonction du maximum ou du minimum des cours du sous-jacent enregistrés durant la durée de vie de l'option.
- Les options **barrières** qui peuvent être annulées si le cours franchit un certain seuil.
- Les options **parisiennes** qui peuvent être annulées ou activées si le cours reste dans une certaine zone plus d'un temps donné.
- Les options **d'échange** qui permettent d'échanger une action X contre une action Y à une date future
- Etc.

### c) Le bon d'option ou warrant

Le bon d'option est un titre intermédiaire entre le bon de souscription et l'option classique. Emis par un établissement financier, les valeurs sous-jacentes sont des actions obligations, devises, indices boursiers, paniers d'actions… Ils se distinguent des options par leur échéance généralement plus longue et par l'impossibilité de **vendre à découvert le contrat**.

| | **Option** | **Bon d'option ou warrant** | **Bon de souscription** |
|---|---|---|---|
| **Emetteur** | Naît de la rencontre d'un acheteur et d'un vendeur | Indépendant de l'émetteur du titre sous-jacent | Emetteur du titre sous-jacent |
| **Exemple** | Option d'achat Air France cotée en Bourse | Call warrant sur Renault émis par la BNP | Bon de souscription d'action Renault émis par Renault |
| **Ouverture de position (transaction initiale)** | Achat d'option d'achat | Achat de call warrant | Achat de bon de souscription |
| | Vente d'option d'achat | | |
| | Achat d'option de vente | Achat de put warrant | |
| | Vente d'option de vente | | |

### d) L'option d'achat (call)

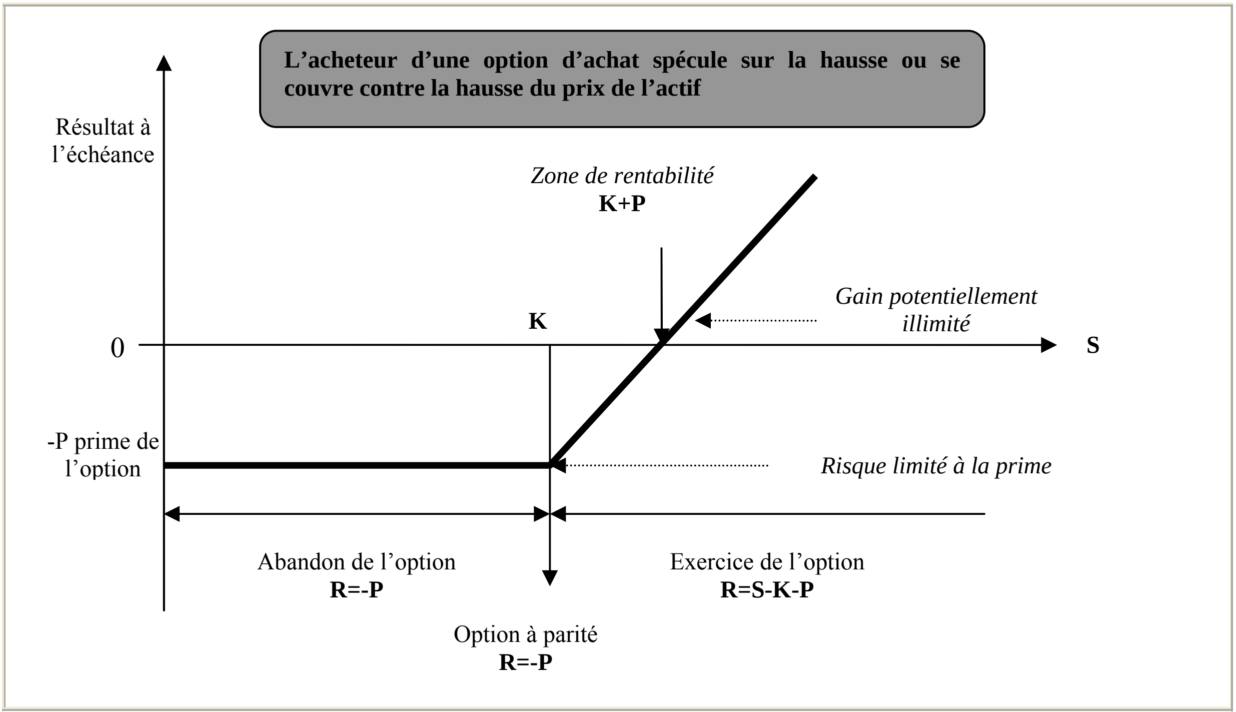
#### *(1) L'achat d'une option d'achat*

L'achat d'une option d'achat confère le droit d'acheter, à (ou jusqu'à) l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie du versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option.

Soient :

- **$K$ :** le prix d'exercice de l'option,
- **$S_0$** : le cours de l'actif sous-jacent sur le marché comptant à la date d'achat,
- **$S$ :** le cours de l'actif sous-jacent à maturité de l'option,
- **$P$** : la prime versée lors de l'achat de l'option,

Le résultat **R** à l'échéance est




Une option d'achat est dite **en dehors de la monnaie** si son prix d'exercice K > S0, **dans la monnaie** si S0>K et **à la monnaie** si S0=K.

**Exemple : l'acheteur de l'option spécule sur la hausse du prix de l'actif sous-jacent.**
Un spéculateur spécule sur la hausse d'une action.
**1)** Il achète une option d'achat au prix d'exercice de 100€ avec un cours du sous-jacent de 100€, moyennant une prime de 3€.
**Cas 1 :** le spéculateur avait raison et le cours est de 130€ : son gain est de 130-100-3=27 et son rapport gain/investissement=27/3=900% !
**Cas 2 :** le spéculateur avait tort et le cours est de 70€ : son gain (sa perte dans ce cas) est de -3 et son rapport gain/investissement=-100%

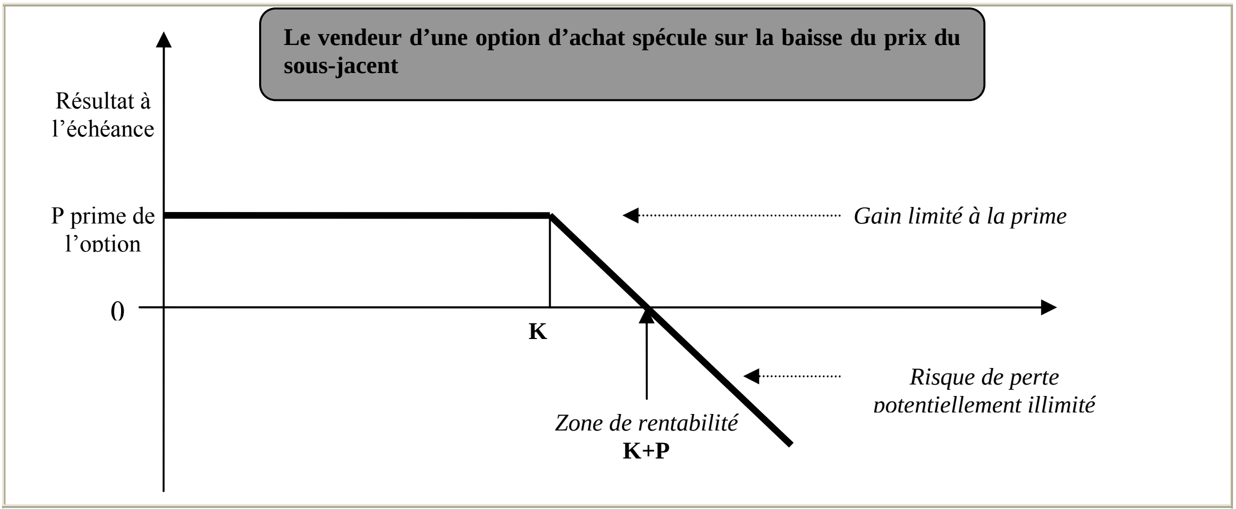
**2)** Il achète une action
**Cas 1** il la revend à 130 et a gagné 30 : gain/investissement=30/100=30%
**Cas 2** il la revend à 70 et a perdu 30 gain/investissement=-30/100=-30%

A travers cet exemple on peut voir que les options permettent **un effet de levier** considérable.

**Exemple : l'acheteur de l'option se couvre contre la hausse du prix de l'actif sous-jacent.**
Une entreprise souhaite acheter 10000 actions X dans 6 mois. Le cours de X est aujourd'hui de 52€.
**1)** Elle achète 10000 options d'achat au prix d'exercice de 52€ moyennant une prime de 2,5€ par option.
**Cas 1 :** 6 mois plus tard le cours est de 68€ : l'entreprise exerce ses options et achète 10000 actions au prix de 10000*52-2,5*10000=520000-25000=495000€
**Cas 2 :** le cours est de 48€ : l'entreprise n'exerce pas ses options et achète les actions sur le marché pour 48*10000-2,5*10000=455000€
**2)** Elle attend et agit 6 mois plus tard sur le marché :
**Cas 1** elle doit payer 680000€ soit une perte par rapport à l'option de 185000€
**Cas 2** elle doit payer 480000€ soit un gain de 25000€
On voit que devant une incertitude, les options restent une stratégie plus prudente.

### *(2) Vente d'une option d'achat*

Le vendeur de l'option d'achat est dans la position symétrique de celle de l'acheteur. Il reçoit immédiatement la prime en contrepartie de laquelle il s'engage sur la durée du contrat à vendre l'actif sous-jacent à la demande de l'acheteur. S'agissant d'un jeu à somme nulle, son résultat à l'échéance est l'opposé de celui de l'acheteur :




Espoir de gain limité, risque illimité de pertes, la vente d'option d'achat seule est à éviter. Elle est généralement associée à une autre position : détention de l'actif, achat d'option d'achat…

## e) Option de vente (put)

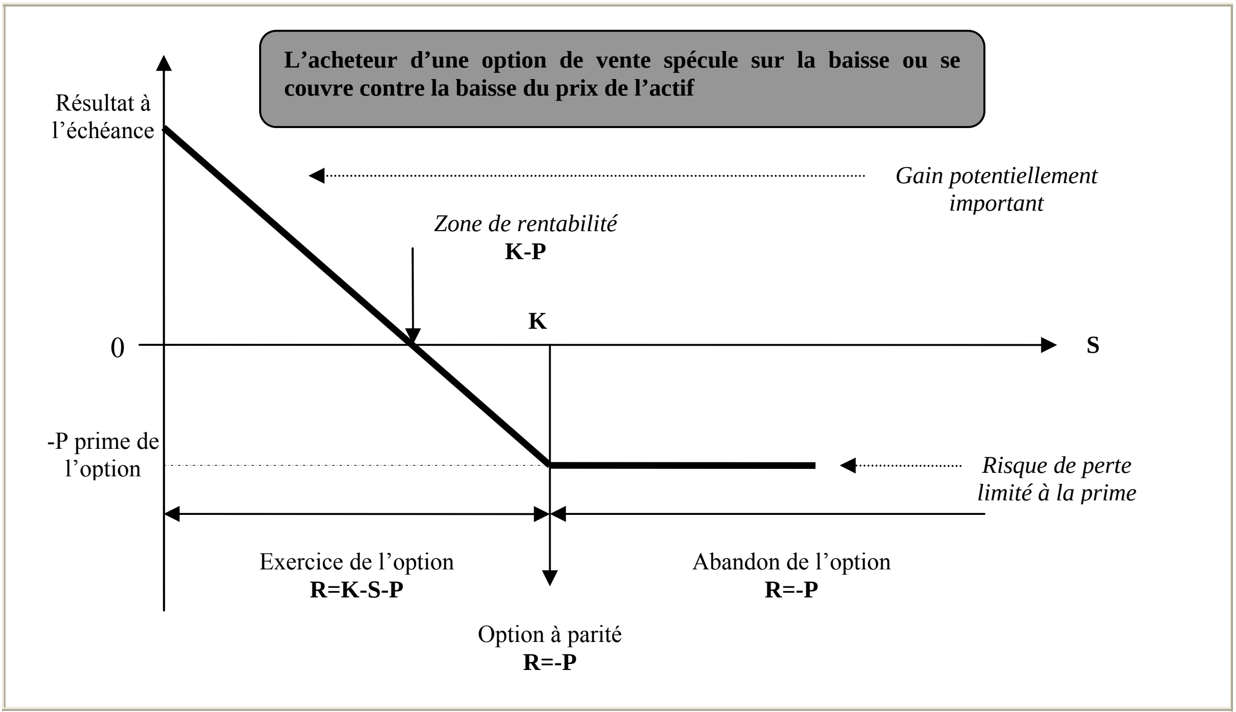
### *(1) Achat d'une option de vente*

L'achat d'une option de vente confère le droit de vendre, à (ou jusqu'à) l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie du versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option.

Soient :

- **K**, le prix d'exercice de l'option,
- **S0**, le cours de l'actif sous-jacent sur le marché comptant à la date d'achat,
- **S,** le cours de l'actif sous-jacent à maturité de l'option,
- **P**, la prime versée lors de l'achat de l'option,

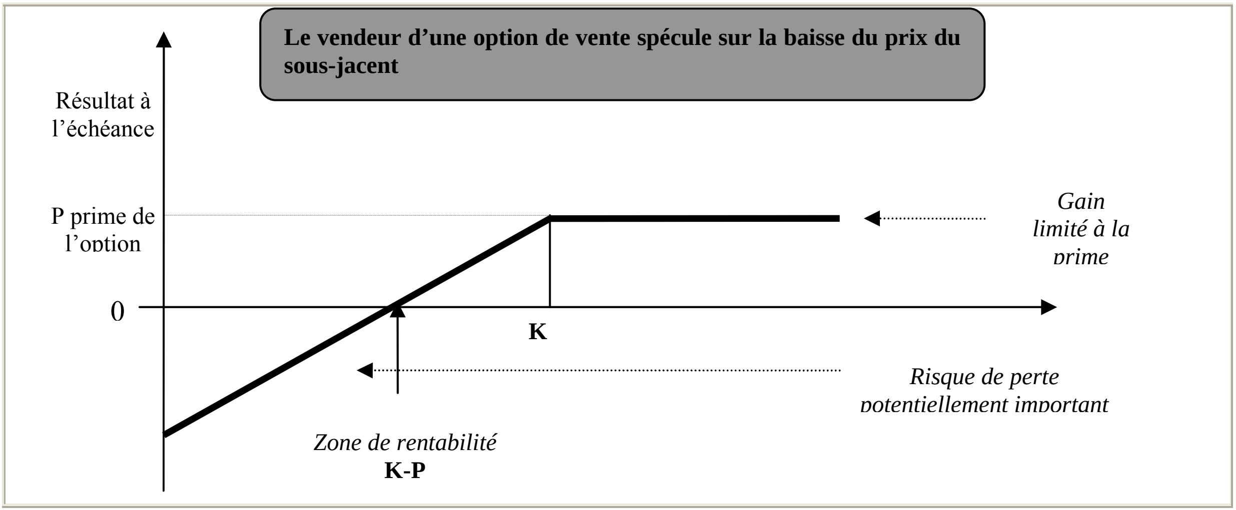
Le résultat **R** à l'échéance est




**Exemple : l'acheteur de l'option se couvre contre la baisse du prix de l'actif sous-jacent.**
Une entreprise souhaite vendre 10000 actions X dans 6 mois. Le cours de X est aujourd'hui de 50€.
**1)** Elle achète 10000 options de vente au prix d'exercice de 50€ moyennant une prime de 2,5€ par option.
**Cas 1 :** 6 mois plus tard le cours est de 40€ : l'entreprise exerce ses options et vend 10000 actions au prix de 10000*50-2,5*10000=500000-25000=475000€
**Cas 2 :** le cours est de 60€ : l'entreprise n'exerce pas ses options et vend les actions sur le marché pour 60*10000-2,5*10000=575000€
**2)** Elle attend et agit 6 mois plus tard sur le marché :
**Cas 1** elle reçoit 400000€ soit une perte par rapport à l'option de 75000€
**Cas 2** elle reçoit 600000€ soit un gain de 25000€

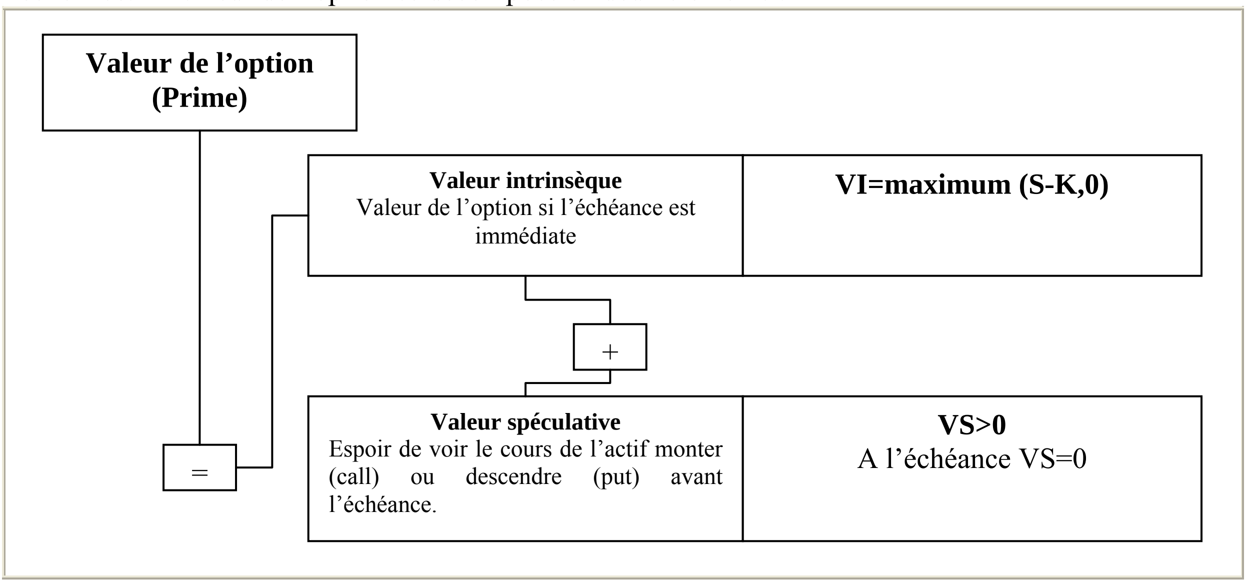
### *(2) Vente d'une option de vente*

Le vendeur de l'option d'achat est dans la position symétrique de celle de l'acheteur. Il reçoit immédiatement la prime en contrepartie de laquelle il s'engage sur la durée du contrat à vendre l'actif sous-jacent à la demande de l'acheteur. S'agissant d'un jeu à somme nulle, son résultat à l'échéance est l'opposé de celui de l'acheteur :

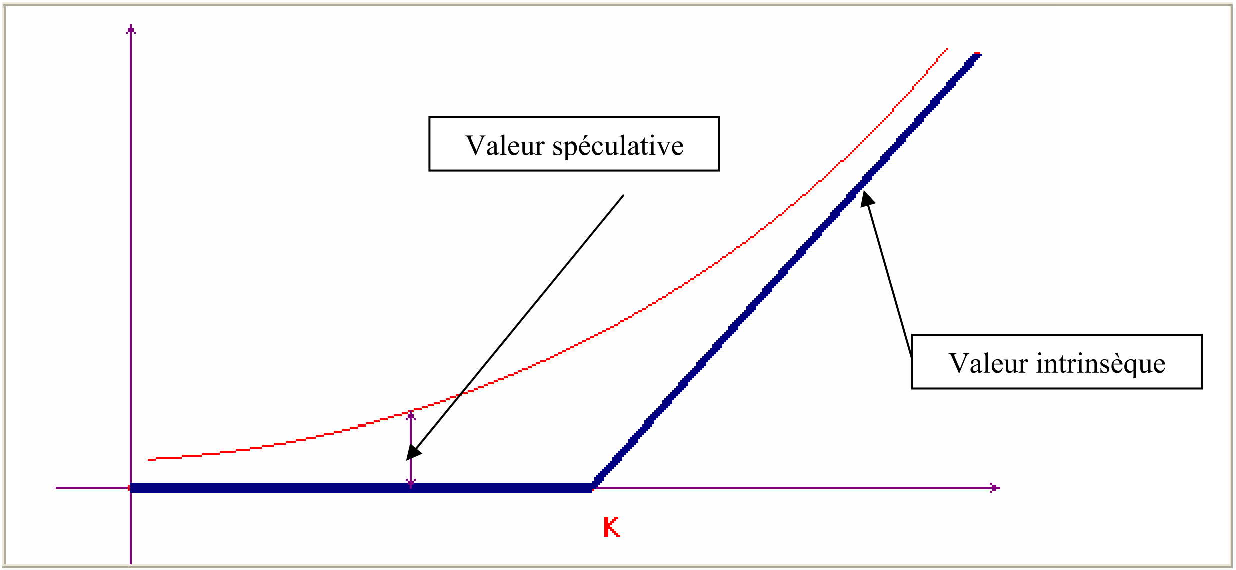



### f) Evaluation des options

Lorsque l'option est négociable, elle est évaluée en permanence entre sa date de création et son échéance. La valeur de l'option se décompose en deux éléments :




Le graphique des valeurs est en général proche de : (pour une option d'achat)




L'évaluation des options dépend des paramètres

| | Option d'achat : OA | Option de vente : OV |
|---|---|---|
| **Cours de l'actif S** | Hausse de S → Hausse de l'OA | Hausse de S → Baisse de l'OV |
| **Prix d'exercice K** | Hausse de K → Baisse de l'OA | Hausse de K → Hausse de l'OV |
| **Durée de vie de l'option** | Réduction de la durée de vie entraîne une baisse de l'OA et l'OV car la probabilité de pouvoir exercer diminue | |
| **Volatilité** | Une hausse de la volatilité des cours entraîne une hausse de l'OA et l'OV car la probabilité de pouvoir exercer augmente | |
| **Taux d'intérêt** | Hausse des taux d'intérêt → hausse de l'OA. En effet, celle-ci peut s'interpréter comme un achat différé. En attendant, l'acquéreur peut placer le montant actualisé du prix d'exercice et bénéficier des intérêts | Hausse des taux d'intérêt → baisse de l'OV. En effet, celle-ci peut s'interpréter comme une vente différée. En attendant, l'acquéreur doit emprunter le montant actualisé du prix d'exercice et payer des intérêts |
| **Revenu distribué** | Distribution de revenu (dividende pour une action) → baisse de S → baisse de l'OA | Distribution de revenu (dividende pour une action) → baisse de S → hausse de l'OV |

## B. *Les marchés des produits dérivés*

### 1. Le MATIF

Le Matif (Marché à terme international de France) a été créé le 20 février 1986, la même année que le marché des valeurs du Trésor. Proposant une large gamme de produits de couverture des risques financiers (taux d'intérêt, indices boursiers, marchandises), le Matif s'inscrit aujourd'hui parmi les plus grands marchés à terme internationaux.

Son rôle est de proposer aux acteurs économiques et financiers, des instruments négociables de gestion des risques liés aux fluctuations des intérêts à long, moyen et court terme, aux variations du cours de certaines matières premières.

### a) Organisation et fonctionnement

| Objectif | Technique et organisation |
|---|---|
| **Sécurité des transactions** | **Chambre de compensation :** Euronext Paris SA s'interpose entre acheteurs et vendeurs et garantit la bonne fin des opérations.<br><br>**Intermédiation :** Les transactions sont réalisées exclusivement par les « adhérents » et leurs « négociateurs ».<br><br>**Dépôt de garantie :** avant de prendre position sur le marché, le donneur d'ordre est tenu de constituer, auprès de l'intermédiaire, un dépôt devant couvrir la perte maximale susceptible d'être enregistrée lors d'une séance de négociation<br><br>**Appel de marge :** Toute position fait l'objet quotidiennement d'une liquidation fictive. La marge est portée sur le compte de l'opérateur.<br>Si le dépôt de garantie est amputé, on procède à un appel de marge auprès de l'opérateur pour qu'il reconstitue son dépôt avant le lendemain. Si l'appel n'est pas couvert la position est liquidée par l'intermédiaire. |
| **Transparence des négociations** | Négociation électronique de 8h à 22h en continu. |
| **Liquidité du marché** | **Contrats standardisés** en terme d'échéances de conditions de livraison, d'unité de négociation, de qualité de l'objectif négocié<br>**La fongibilité des contrats :** possibilité de dénouer une position avec une contrepartie différente de l'initiale |

### b) Les deux principaux contrats Matif en euros

#### *(1) Principales caractéristiques du contrat à terme Euro Notionnel*

Ce sont des contrats de **gestion du risque de taux d'intérêt à long terme.**

| | |
|---|---|
| Sous-jacent | Emprunt fictif d'État, libellé en euro, remboursable *in fine*, de maturité résiduelle comprise entre 8,5 et 10,5 ans, coupon 3,50 % |
| Nominal | 100 000 euros |
| Mode de cotation | Pourcentage du nominal exprimé avec deux décimales au pied du coupon |
| Dépôt de garantie | 1500 euros |
| Échéances | Trois échéances trimestrielles successives parmi mars, juin, septembre, décembre |
| Titres livrables | Livraison de titres choisis par le vendeur dans une liste d'emprunts français et allemands, de maturité résiduelle 8,5 à 10,5 ans amortis in fine, d'encours minimal de 6 milliards d'euros, réglés un mois avant la date de règlement/livraison de l'échéance. |

Le cours du contrat varie en fonction du taux du marché comme une obligation à taux fixe :

- Lorsque le taux du marché obligataire est de 3,5%, le contrat notionnel vaut 100.
- Si le taux monte le cours du contrat baisse et inversement.

La valeur temps du contrat notionnel euro se calcule comme une obligation à savoir (voir**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**)

$$VT = 3,5 \times \frac{1-(1+t)^{-durée}}{t} + 100 \times (1+t)^{-duree}$$

Où t est le taux d'intérêt des emprunts d'états à l'émission.

**Exemple :** Le 25 avril, un spéculateur anticipant une baisse des taux de marché financier, achète 10 contrats Euro Notionnel, échéance juin. Son ordre est exécuté à 87,48.

L'adhérant traitant pour le compte du spéculateur lui demande un dépôt de garantie de 1500x10=15000€
Le 25 avril au soir, le cours est de 87,58
Son compte est crédité de 10x (87,58-87,48) %x100000=+1000 €
Les jours suivants dégagent les marges ci-dessous

- 25 avril : Cours 87,58 ; Restitution de marge +1000€ ; Solde +1000€
- 26 avril : Cours 87,52 ; Appel de marge -600€ ; Solde +400€
- 27 avril : Cours 87,50 ; Appel de marge -200€ ; Solde +200€
- 28 avril : Cours 87,62 ; Restitution de marge +1200€ ; Solde +1400€

A cette dernière date, il déboucle sa position et touche 1400€ plus restitution de son dépôt de garantie.
Le résultat global peut être calculé directement : 10x (87,62-87,48) %x100000=+1400 €

### *(2) Caractéristiques des options sur Euro Notionnel*

| | |
|---|---|
| Sous-jacent | 1 contrat à terme ferme Euro Notionnel |
| Type | Option américaine exerçable à tout instant |
| Echelle des prix d'exercice | Ouverture d'options à, en dehors et dans la monnaie |
| Echéances | 2 mois rapprochés et 3 échéances trimestrielles parmi mars, juin, septembre, décembre.<br>L'échéance mensuelle porte sur l'échéance trimestrielle du contrat ferme immédiatement ultérieur |
| Liquidation | L'exercice de l'option se traduit par :<br>♦ L'achat ou la vente d'un contrat ferme sur la même échéance ou sur l'échéance trimestrielle suivante.<br>♦ L'assignation par tirage au sort d'un vendeur. |
| Cotation | Prime exprimée en % du nominal |

### *(3) Principales caractéristiques du contrat à terme Euribor 3 mois*

| | |
|---|---|
| Sous-jacent | Dépôt d'une valeur de 1 000 000€ pour une durée de 90 jours. Les taux d'intérêts sont calculés en retenant un prorata de 90/360 |
| Nominal | 1 000 000€ |
| Mode de cotation | Indice à trois décimales correspondant à : 100 – taux Euribor 3 mois. Comme pour l'Euro Notionnel une hausse des taux provoque une baisse des cours. |
| Dépôt de garantie | 500€ |
| Échéances | Deux échéances mensuelles et 20 trimestrielles successives parmi mars, juin, septembre, décembre |

| | |
|---|---|
| Liquidation | Cash settlement : le cours de liquidation correspond à : 100 – Euribor 3 mois, établi le jour de clôture et arrondi à l'échelon de cotation |

**Exemple :** Le 9 janvier, un spéculateur anticipant une hausse des taux dans les 9 prochains mois vend 5 contrats Euribor 3 mois sur l'échéance septembre. Son ordre est exécuté à 96,42 (taux implicite 3,58%). Le dépôt de garantie est de 5x500€=2500€. La position n'est pas soldée avant l'échéance.

**Cas 1 : à l'échéance le cours de liquidation s'établit à 95,98**

Son compte est crédité du solde des appels et restitutions de marge :

$$\left(96,42-95,98\right)\%\times 1000000\times\frac{90}{360}\times 5=5500€$$

**Cas 2 : à l'échéance le cours de liquidation s'établit à 96,88**

Sa perte est de :

$$\left(96,42-96,88\right)\%\times 1000000\times\frac{90}{360}\times 5=-5750€$$

Ce qui correspond aux appels de marge.

## 2. Le MONEP

Ouvert en septembre 1987, le MONEP (Marché des Options Négociables de Paris) est un marché réglementé de contrat fermes et optionnels portant sur des actions cotées sur un marché réglementé de l'espace économique européen et sur des indices sur actions.

### a) Organisation et fonctionnement

| Objectif | Technique et organisation |
|---|---|
| **Sécurité des transactions** | **Chambre de compensation :** Euronext Paris SA s'interpose entre acheteurs et vendeurs et garantit la bonne fin des opérations.<br><br>**Intermédiation :** Les transactions sont réalisées exclusivement par les « adhérents » et leurs « négociateurs ».<br><br>**Couverture :**<br>Une couverture (dépôt de garantie), ajustée quotidiennement est demandée aux opérateurs détenant une position ouverte sur les contrats fermes et une position globale nette vendeur sur les options. La couverture doit faire face à la liquidation éventuelle de leur position, dans l'hypothèse de l'évolution la plus défavorable des cours de l'actif lors de la séance suivante. Exemples :<br>♦ Achats d'options : pas de couverture, risque limité à la prime<br>♦ Ventes d'options : couverture exigée<br>♦ Achats/Ventes d'options : calcul d'une position nette ; couverture exigée su position nette vendeur |
| **Transparence des négociations** | ♦ Négociation électronique de 8h à 22h pour les contrats fermes<br>♦ De 9h à 17h pour les options. |
| **Liquidité du marché** | **Contrats standardisés** en terme d'échéances de conditions de livraison, d'unité de négociation, de qualité de l'objectif négocié<br>**La fongibilité des contrats :** possibilité de dénouer une position avec une contrepartie différente de l'initiale |

### b) Contrats à terme ferme sur le CAC 40

| | |
|---|---|
| Sous-jacent | Indice CAC 40 constitué des 40 valeurs françaises du Premier Marché, indice base 1000le 31/12/1987 |
| Nominal | Valeur de l'indice x 10 euros |
| Echéances | 8 échéances glissantes, 3 mois rapprochés et 3 échéances trimestrielles et 2 échéances semestrielles.<br>A chaque échéance correspond un contrat différent |
| Liquidation | Pas de livraison possible.<br>Toute position non dénouée avant l'échéance donne lieu à un ultime appel de marge sur la base du CAC40. |
| Dépôt de garantie | 350 points d'indice soit 3500€ |
| Cotation | De l'indice |

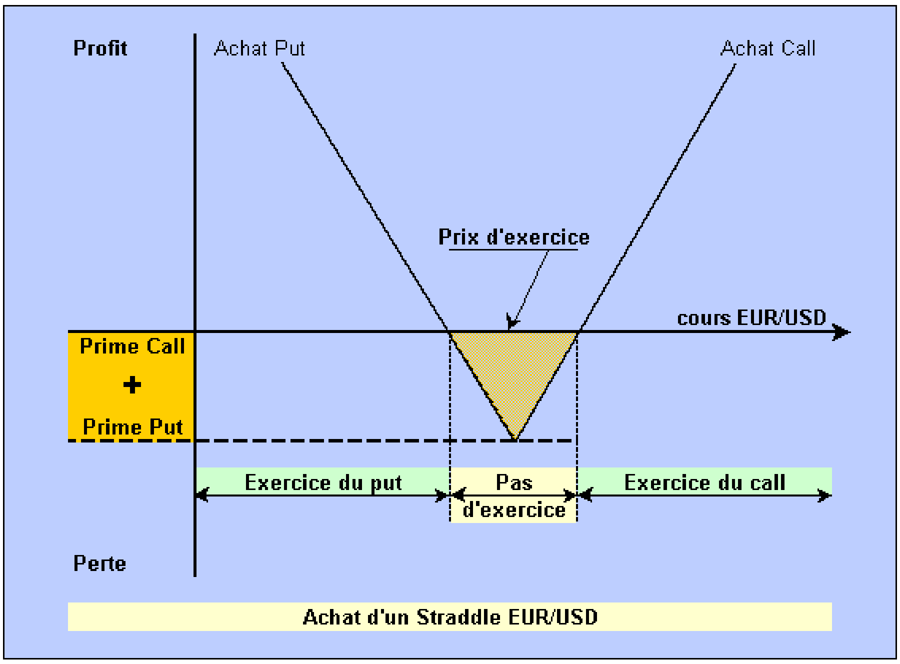
> **Exemple :** Le 12 novembre, un spéculateur anticipant une hausse du CAC 40 achète 5 contrats sur l'échéance novembre. Son ordre est exécuté à 3556. Le dépôt de garantie est de 3500x5=17500€.
> Le spéculateur revend des ses contrats le 19 novembre à 3666. Son compte est crédité de (3666-3556)*10*5=4350€.

## *C. Stratégies complexes*

Sauf indication contraire, les stratégies détaillées ci-dessous peuvent s'appliquer aussi bien aux options de change qu'aux options de taux.

### 1. Stratégie sur la volatilité : le straddle

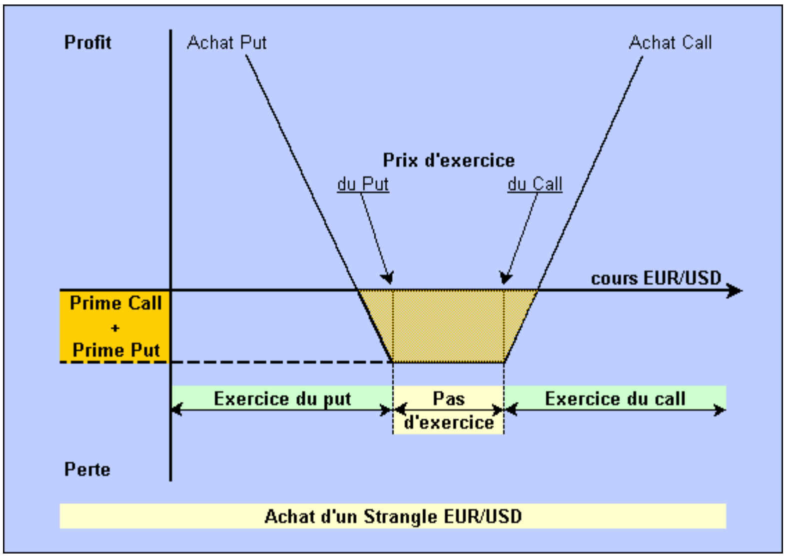
Le straddle correspond à l'achat simultané d'un call et d'un put au même prix d'exercice.
L'acheteur de straddle anticipe une forte variation de cours indépendamment du sens de celle-ci. Cette variation doit être suffisamment importante pour lui permettre le paiement des 2 primes et si possible exercice d'une des options.



A contrario, le vendeur de straddle table sur une stabilité des cours par rapport au prix d'exercice afin de lui permettre de conserver au moins une partie des primes touchées initialement. Dans ce cas, les figures ci-dessus sont inversées.

## 2. Stratégie sur la volatilité : le strangle

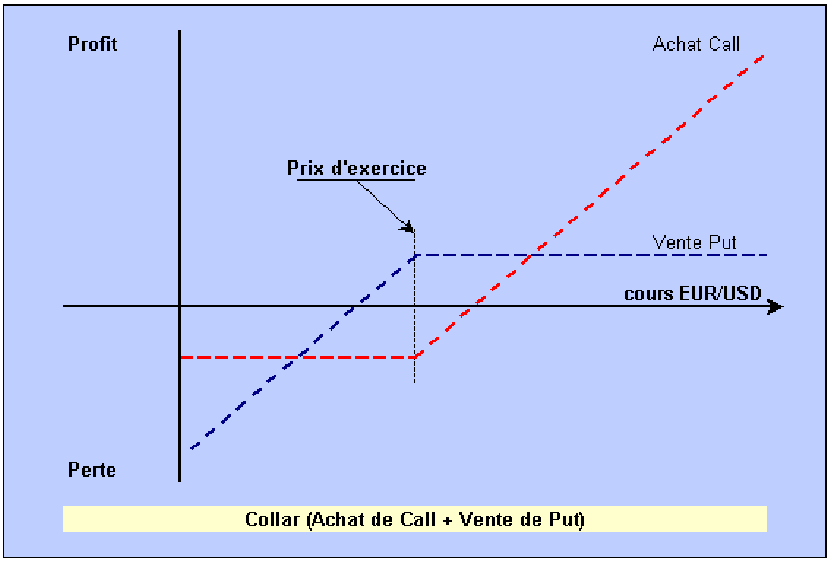
Le strangle correspond également à l'achat simultané d'un call et d'un put mais à des prix d'exercice différents. De plus ces prix seront « out of the money » afin de minimiser le montant des primes à payer. Par contre l'écart de volatilité devra être plus important pour permettre le remboursement des primes.




Inversement, le vendeur de strangle espère une baisse de volatilité permettant de rester dans la fourchette de gain.

## 3. Stratégie sur le prix : le collar

Le collar correspond à l'achat d'une option (call ou put) associé à la vente d'une option de sens contraire (put ou call). Ce type d'option est également appelé terme synthétique.
Bien entendu un collar du type Achat de Put + Vente de Call est tout à fait possible. Ce type de stratégie est insensible aux variations de volatilité.



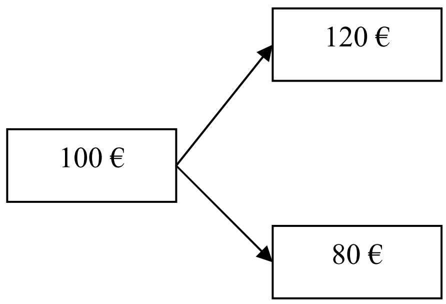
# V. Modèle d'évaluation par arbre

Le but de ce chapitre est de fournir une introduction aux calculs des primes (ou prix) des options. Le vendeur du produit dérivé fixe la prime en fonction des possibilités de **couverture ou de réplication** (i.e. des stratégies permettant **d'annuler le risque encouru**) qui lui sont offertes.

## *A. Modèle à une période*

### 1. Un exemple

On s'intéresse à l'évaluation d'un call européen. Les caractéristiques de cette option sont les suivantes :




prix du sous-jacent

| |
|---|
| Le **sous-jacent** est une action qui côte *100 €* aujourd'hui |
| Le **prix d'exercice** de l'option est de *105 €* |
| L'acheteur paye au vendeur une **prime** C |
| On suppose que le sous-jacent vaudra soit 120 €, soit *80 €* dans un mois |
| On dispose par ailleurs, d'un outil financier sans risque permettant de placer de l'argent au taux $r = 5\%$ par mois et d'en emprunter à ce même taux. |

L'acheteur de l'option va donc payer la prime $C > 0$ au vendeur. Son profit sera:

- $120 - 105 - C = 15 - C$ si le cours vaut 120 €
- $-C$ si le cours vaut 80 €

On voit que les pertes de l'acheteur sont limitées à la prime qui est inférieur à 2 €. Par ailleurs, si l'option a été achetée pour couvrir un risque (de change par exemple) on peut considérer que cette perte est une prime « d'assurance ».

En revanche, le vendeur de l'option (une banque par exemple) peut perdre jusqu'à 15-C €. Sur plusieurs milliers d'options, cela peut représenter une somme considérable, surtout si ces options ne couvrent pas d'autres risques. Pour essayer d'éviter cette perte, elle (la banque) va mettre en oeuvre une **stratégie de réplication** en jouant sur le fait qu'elle peut

- acheter et vendre des actions ou des « parties » d'action. On peut même vendre une action avant de l'acheter (ce que l'on appelle **vente à découvert**)
- placer et emprunter de l'argent au taux 5%.

La stratégie va se construire comme ceci : en parallèle de la vente de l'option, la banque ou l'institution financière va acheter ou vendre une quantité D d'actions (si D<0 elle vend -D actions, si D>0 elle achète D actions). Par ailleurs, elle va emprunter ou placer l'argent nécessaire à ces deux opérations.

**Remarque :** l'opération sur les actions va lui rapporter -20D. Il s'agit d'un gain algébrique. Si D>0, elle a dépensé 20D>0 et son gain est de -20D<0. Si D<0, la vente d'action lui a fait gagné -20D>0 ou dépensé 20D<0.

Nous allons adopter désormais une notation afin de clarifier les situations de gain algébrique.

**Définition :** On appelle actifs financiers, des valeurs financières (actions, argent, obligations) qui sont échangeables. A chaque actif et pour chaque date, correspond un prix.

Dans ce chapitre on considère trois actifs financiers : une option, le sous-jacent de cette option et l'argent.

- On note $S_t$ le prix du sous-jacent à l'instant *t*. Dans l'exemple ci-dessus, $S_0 = 100$ et $S_1 = 120$ ou $S_1 = 80$.
- On note $\pi_t$ le prix de l'option : on sait que dans le cas du call ci-dessus, $\pi_1 = (S_1 - 105)_+$ car si l'option est acheté à sa maturité, on peut l'exercer immédiatement et effectuer un profit correspondant à son payoff. De plus, dans l'exemple $\pi_0 = C$.
- On note $S_t^0 = (1+r)^t$, le prix de l'argent. En effet, 1€ à la date 0 vaut $1+r$ € à la date 1.

Le vecteur de prix du marché est $\Pi_t = (\pi_t, S_t, S_t^0)$.

**Définition :** on appelle portefeuille financier un portefeuille contenant des options, des actions et de l'argent. Un portefeuille P s'écrira comme un triplet :

$$P = (\underbrace{n_O}_{\text{quantité d'options}}, \underbrace{n_S}_{\text{quantité d'actions}}, \underbrace{n_C}_{\text{quantité d'argent}})$$

Lorsque les quantités sont positives cela signifie que l'on a une position créditrice :

- Achat d'options
- Achat d'actions
- Placement d'argent

Lorsque les quantités sont négatives cela signifie que l'on a une position débitrice :

- Vente d'options
- Vente à découvert d'actions
- Emprunt d'argent

La valeur d'un portefeuille est la somme algébrique des quantités par la valeur des produits financiers correspondants :

$$V = P \cdot \Pi_t = n_O \pi_t + n_S S_t + n_C S_t^0$$

Dans le cas qui nous intéresse, la banque détient le portefeuille $(-1, D, X)$ où X est la quantité d'argent nécessaire pour annuler la valeur du portefeuille :

$$V = -1 \times C + D \times 100 + X \times 1 = 0 \Leftrightarrow X = C - 100D$$

Si X>0, on considère qu'elle a réalisé un placement, sinon elle a emprunté.

A t=1 mois, plusieurs cas peuvent arriver suivant la valeur de l'action:

- Si l'action vaut 120 €. Le portefeuille aura alors comme valeur :

$$V^1 = -1 \times (120 - 105) + D \times 120 + X \times (1 + 5\%) = 120D + 1.05X - 15$$
$$= 120D + 1.05(C - 100D) - 15 = 15D + 1.05C - 15$$

- Si l'action vaut 18 €. Le portefeuille aura alors comme valeur :

$$V^2 = -1 \times 0 + D \times 80 + X \times (1 + 5\%) = 80D + 1.05X$$
$$= 80D + 1.05(C - 100D) = -25D + 1.05C$$

Plusieurs cas peuvent donc se produire :

| | |
|---|---|
| $V^1 > 0, V^2 > 0$ | Gain à coup sur |
| $V^1 = 0, V^2 > 0$ ou $V^1 > 0, V^2 = 0$ | Gain à coup sur (peut être nul) |
| $V^1 = 0$ et $V^2 = 0$ | Pas de gain ni de perte |
| Autre cas | Probabilité de perte non nulle |

Si le vendeur est sur de gagner, on appelle cela une **opportunité d'arbitrage**. Or, sur les marchés financiers on peut supposer qu'il n'existe pas de telles opportunités car lorsqu'elles se présentent elles sont exploitées et les cours s'ajustent alors pour qu'elles disparaissent.

Les deux premiers cas étant impossible par **AOA (absence d'opportunités d'arbitrage)**, et le vendeur voulant limiter ses pertes, il met en œuvre la stratégie lui permettant d'obtenir :

$$V^1 = 0 \text{ et } V^2 = 0$$

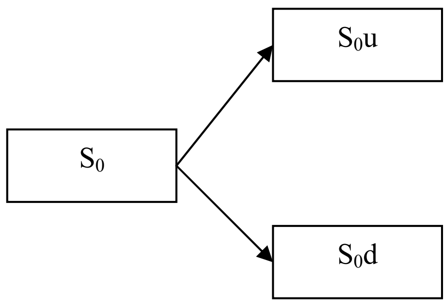
Ainsi, on peut résoudre le système avec C et D comme inconnues pour trouver :

$$D = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \text{ et } C = \frac{25D}{1.05} = \frac{25 \times 3}{1.05 \times 8} = 8.93€$$

Autrement dit, si la banque fait payer 8.93 € et, dans le même temps, elle achète 3/8 d'actions et emprunte (car $X < 0$) $|X| = |C - 100D| = |8.93 - 37.5| = 28.57$ €, elle sera certaine, au bout d'un mois, d'obtenir un portefeuille de valeur nul. Comme elle est partie d'un portefeuille de valeur nulle elle aura annuler le risque encouru (mais ne pourra pas réaliser de profit).

## 2. Hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage

On se place dans un cadre général en considérant un call :




| | |
|---|---|
| Le **sous-jacent** est une action qui côte $S_0$ aujourd'hui |
| Le **prix d'exercice** de l'option est de $K$ |
| L'acheteur paye au vendeur une **prime** $\pi_0$ |
| On suppose que le sous-jacent vaudra soit $S_0u$, soit $S_0d$ dans une période avec $u > d$ |
| On dispose par ailleurs, d'un outil financier sans risque permettant de placer de l'argent au taux $r$ par mois et d'en emprunter à ce même taux. |

Une des hypothèses fondamentales de l'exemple précédant est ce que l'on a appelé l'AOA.

**Définition :** On appelle stratégie un triplet $(n_O, n_S, n_C)$ représentant les quantités d'option, d'action et d'argent investies dans un portefeuille. Le plus souvent $n_O$ sera égal à -1 (vendeur de l'option), +1 (acheteur de l'option) ou 0 (pas d'option).

**Définition :** Une opportunité d'arbitrage est une stratégie $(n_O, n_S, n_C)$ telle que la valeur du portefeuille à t=0 est nulle et sa valeur à t=1 vérifie :

$$V \geq 0 \text{ et } V > 0 \text{ pour au moins un cas}$$

**Hypothèse (AOA) :** On suppose désormais qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage

**Conséquence 1 :** dans le modèle décrit ci-dessus, l'AOA implique que $d < 1+r < u$ . En effet si on considère le portefeuille $(0,+1,-S_0)$, on voit que sa valeur à t=0 est 0 et à t=1 est

- $-S_0u + S_0(1+r) = S_0(1+r-u)$ si le cours est monté
- $-S_0d + S_0(1+r) = S_0(1+r-d)$ si le cours est descendu.

Ainsi, comme $u > d$ le seul moyen de ne pas avoir d'opportunités d'arbitrage est d'avoir l'inégalité ci-dessus $d < 1+r < u$ (si $1+r > u$ , on a nécessairement par AOA $1+r < d$ ce qui est impossible et réciproquement)

**Conséquence 2 :** Si $\pi_0$ est le prix d'un call alors : $\left(S_0 - \frac{K}{1+r}\right)_+ \le \pi_0 \le S_0$. Pour démontrer l'inégalité de gauche on raisonne par l'absurde. On suppose que $\pi_0 > S_0$ . Cela signifie que le call est plus cher qu'une action. On vend donc le call et on achète une action ce qui revient à construire le portefeuille $(-1,+1,\pi_0 - S_0)$ . Sa valeur est à t=0 est $V = -1\times\pi_0 + 1\times S_0 + \pi_0 - S_0 = 0$ . A t=1, la valeur du portefeuille est :

- Si le cours est $S_0u$ alors $$V = -1\times(S_0u-K)_+ + 1\times S_0u + (\pi_0 - S_0)(1+r) = \underbrace{S_0u - (S_0u-K)_+}_{\ge 0} + \underbrace{(\pi_0 - S_0)(1+r)}_{>0}$$
- Si le cours est $S_0d$ alors $$V = -1\times(S_0d-K)_+ + 1\times S_0d + (\pi_0 - S_0)(1+r) = \underbrace{S_0d - (S_0d-K)_+}_{\ge 0} + \underbrace{(\pi_0 - S_0)(1+r)}_{>0}$$

Le vendeur a donc crée une opportunité d'arbitrage ce qui est impossible. Donc $\pi_0 \le S_0$. L'autre inégalité est laissée en exercice.

De temps à autre, les stratégies ne comporteront pas une seule option. Une stratégie sera alors un quadruplet $(n_{O1}, n_{O2}, n_S, n_C)$ ou autre suivant le nombre d'options. De même on notera $\pi_t^1$ le prix de l'option 1 au temps *t* et $\pi_t^2$ celui de l'option 2.

**Conséquence 3 :** *Parité Call Put*. Si $\pi_0^C$ est le prix d'un call d'échéance 1 mois et de prix d'exercice K et $\pi_0^P$ est le prix d'un put d'échéance 1 mois et de prix d'exercice K vérifiant $S_0d < K < S_0u$ alors :

$$\pi_0^C - \pi_0^P = S_0 - \frac{K}{1+r}$$

*Démonstration :* Supposons que $\pi_0^C - \pi_0^P > S_0 - \frac{K}{1+r}$. On crée la stratégie correspondant à la vente d'un call, l'achat d'un put et l'achat d'une unité de sous-jacent : $(\underbrace{-1}_{call}, \underbrace{+1}_{put}, \underbrace{+1}_{action}, \underbrace{\pi_0^C - \pi_0^P - S_0}_{argent})$. La valeur du portefeuille est donc, à t=0,

$$V = -1\times\pi_0^C + 1\times\pi_0^P + 1\times S_0 + \pi_0^C - \pi_0^P - S_0 = 0$$

On rappelle l'identité $(K-x)_+ - (x-K)_+ = K - x$ . A t=1, la valeur du portefeuille est :

- Si le cours est $S_0u$ alors :

$$V = -1\times\left(S_0u-K\right)_+ + 1\times\left(K-S_0u\right)_+ + 1\times S_0u + \left(\pi_0^C-\pi_0^P-S_0\right)(1+r)$$
$$= K - S_0u + S_0u + \left(\pi_0^C-\pi_0^P-S_0\right)(1+r)$$
$$> K - \frac{K}{1+r}(1+r) = 0$$

- Si le cours est $S_0d$ alors :

$$V = -1\times\left(S_0d-K\right)_+ + 1\times\left(K-S_0d\right)_+ + 1\times S_0d + \left(\pi_0^C-\pi_0^P-S_0\right)(1+r)$$
$$= K - S_0d + S_0d + \left(\pi_0^C-\pi_0^P-S_0\right)(1+r)$$
$$> K - \frac{K}{1+r}(1+r) = 0$$

On a crée une stratégie qui a pour valeur 0 à t=0 et qui est strictement positive à t=1 quelque soit les cas. On a donc une opportunité d'arbitrage.

Supposons que $\pi_0^P-\pi_0^C+S_0 > \frac{K}{1+r}$. On crée la stratégie $(\underbrace{+1}_{call}, \underbrace{-1}_{put}, \underbrace{-1}_{action}, \underbrace{\pi_0^P-\pi_0^C+S_0}_{argent})$. La valeur du portefeuille est donc, à t=0,

$$V = +1\times\pi_0^C - 1\times\pi_0^P - 1\times S_0 + \pi_0^P - \pi_0^C + S_0 = 0$$

A t=1, la valeur du portefeuille est :

- Si le cours est $S_0u$ alors :

$$V = 1\times\left(S_0u-K\right)_+ - 1\times\left(K-S_0u\right)_+ - 1\times S_0u + \left(\pi_0^P-\pi_0^C+S_0\right)(1+r)$$
$$= S_0u - K - S_0u + \left(\pi_0^P-\pi_0^C+S_0\right)(1+r)$$
$$> -K + \frac{K}{1+r}(1+r) = 0$$

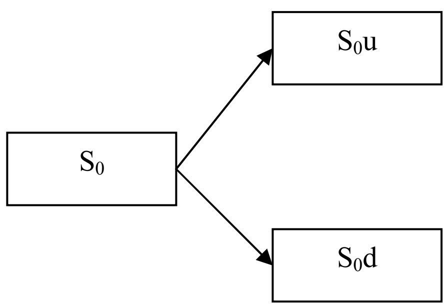
- Si le cours est $S_0d$ alors :

$$V = 1\times\left(S_0d-K\right)_+ - 1\times\left(K-S_0d\right)_+ - 1\times S_0d + \left(\pi_0^P-\pi_0^C+S_0\right)(1+r)$$
$$= -K + S_0d - S_0d + \left(\pi_0^P-\pi_0^C+S_0\right)(1+r)$$
$$> -K + \frac{K}{1+r}(1+r) = 0$$

On a crée une stratégie qui a pour valeur 0 à t=0 et qui est strictement positive à t=1 quelque soit les cas. On a donc une opportunité d'arbitrage.

## 3. Cas général

On s'intéresse toujours à l'évaluation du call Européen dans le cadre de la partie 2 :




| | |
|---|---|
| | Le **sous-jacent** est une action qui côte $S_0$ aujourd'hui |
| | Le **prix d'exercice** de l'option est de $K$ |
| | L'acheteur paye au vendeur une **prime** $\pi_0$ |
| | On suppose que le sous-jacent vaudra soit $S_0u$, soit $S_0d$ dans une période |
| | On dispose par ailleurs, d'un outil financier sans risque permettant de placer de l'argent au taux $r$ par mois et d'en emprunter à ce même taux. |

Le raisonnement sera celui de la partie 1. On considère que le vendeur de l'option effectue une transaction sur l'action en achetant ou vendant une quantité $n_S$. Il crée donc la stratégie $(-1, n_S, n_C)$ où *X* est la somme d'argent nécessaire à l'obtention du portefeuille de valeur nulle à t=0. Ainsi :

$$V = -1\times\pi_0 + n_S \times S_0 + n_C = 0 \Leftrightarrow n_C = \pi_0 - n_S S_0$$

A t=1, le portefeuille vaudra :

- Si l'action vaut $S_0u$ :

$$V^u = -(S_0u-K)_+ + n_S S_0 u + n_C(1+r) = -(S_0u-K)_+ + n_S S_0 u + (\pi_0 - n_C S_0)(1+r)$$
$$= -(S_0u-K)_+ + n_S S_0\left(u-(1+r)\right) + \pi_0(1+r)$$

- Si l'action vaut $S_0d$ :

$$V^d = -(S_0d-K)_+ + n_S S_0 d + n_C(1+r) = -(S_0d-K)_+ + n_S S_0 d + (\pi_0 - n_C S_0)(1+r)$$
$$= -(S_0d-K)_+ - n_S S_0\left((1+r)-d\right) + \pi_0(1+r)$$

Pour éviter les opportunités d'arbitrage, on suppose que $V^u = V^d = 0$ ce qui donne un système de deux équations à deux inconnues (*C* et *D*). En écrivant

$$V^u - V^d = 0 \Leftrightarrow -(S_0u-K)_+ + (S_0d-K)_+ + n_S S_0(u-d) = 0 \Leftrightarrow \boxed{n_S = \frac{(S_0u-K)_+ - (S_0d-K)_+}{S_0(u-d)}},$$

En utilisant $V^u = 0$, on obtient

$$\pi_0(1+r) = (S_0u-K)_+ - n_S S_0\left(u-(1+r)\right) = (S_0u-K)_+ - \frac{(S_0u-K)_+ - (S_0d-K)_+}{\cancel{S_0}(u-d)}\cancel{S_0}\left(u-(1+r)\right)$$

$$= (S_0u-K)_+\left(1-\frac{u-(1+r)}{u-d}\right) + (S_0d-K)_+\frac{u-(1+r)}{u-d} \Leftrightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{1+r}\left((S_0u-K)_+\frac{1+r-d}{u-d} + (S_0d-K)_+\frac{u-(1+r)}{u-d}\right)}$$

Si on pose $p = \dfrac{1+r-u}{u-d}$, le prix du call se réécrit :

$$\pi_0 = \frac{1}{1+r}\left(p(S_0u-K)_+ + (1-p)(S_0d-K)_+\right)$$

Or vu la conséquence 1 de la partie 2, on voit que $p \in \left]0,1\right[$. On peut définir une probabilité sur l'espace $(\Omega = \{d,u\}, \mathcal{P}(\Omega))$ la probabilité $\mathbb{Q}\left(\frac{S_1}{S_0}=u\right) = 1-\mathbb{Q}\left(\frac{S_1}{S_0}=d\right) = p$. Le prix se réécrit alors :

$$C = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_1-K)_+}{1+r}\right]$$

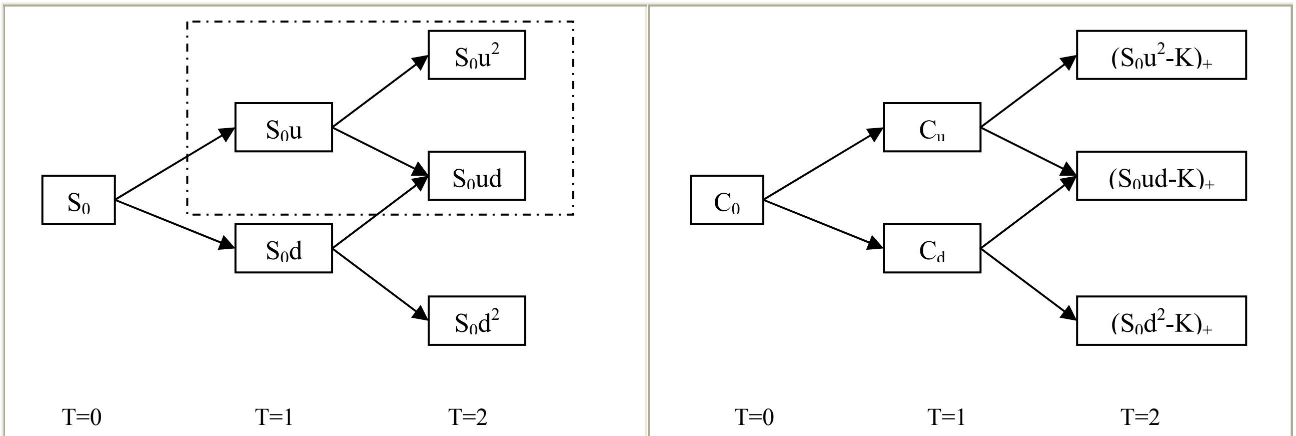
Le prix est donc **l'espérance** sous une probabilité (appelée **probabilité risque neutre ou probabilité martingale**) du **profit actualisée** de l'option. Cette prime a été calculée par **absence d'opportunités d'arbitrage** en évaluant une stratégie **répliquant ou couvrant** l'option. Ces notions sont générales, c'est ce que l'on nomme **l'évaluation par arbitrage**.

**Remarque :** On voit que $n_S > 0$ ce qui signifie que pour couvrir un call il faut acheter des actions.

**Exercice :** Effectuer les calculs pour le put de prix d'exercice *K* et montrer que

$$n_S = \frac{(K-S_0u)_+ - (K-S_0d)_+}{S_0(u-d)}, \text{ et } \pi_0^P = \frac{1}{1+r}\left(p(K-S_0u)_+ + (1-p)(K-S_0d)_+\right)$$

## B. Modèle à deux périodes




Evolution du prix de l'action | Evolution du prix de l'option

On suppose désormais que l'action évolue suivant le graphique sur deux périodes (deux mois par exemple). L'option a un prix à t=0 mais aussi un prix à t=1. En effet, il est possible d'acheter une option au cours de sa durée de vie. Evidemment du fait de l'évolution du cours de l'action et de l'argent ce prix ne sera pas celui de départ. De plus, si on achète l'option au temps 1, on connaît l'évolution de l'action entre t=0 et t=1. Si on considère la partie en pointillé de l'arbre on s'aperçoit que l'on est ramené à la partie précédente. On a donc :

$$\pi_1^u = \frac{1}{1+r}\left(\left(S_0u^2-K\right)_+\frac{1+r-d}{u-d}+\left(S_0ud-K\right)_+\frac{u-(1+r)}{u-d}\right)$$

$$\text{et } \pi_1^d = \frac{1}{1+r}\left(\left(S_0ud-K\right)_+\frac{1+r-d}{u-d}+\left(S_0d^2-K\right)_+\frac{u-(1+r)}{u-d}\right)$$

Par ailleurs, les stratégies à mettre en place pour couvrir l'option sont pour la partie haute de l'arbre $\left(-1, n_S^u, \pi_1^u - n_S^u S_0 u\right)$ avec $n_S^u = \dfrac{\left(S_0u^2-K\right)_+ - \left(S_0ud-K\right)_+}{S_0u\left(u-d\right)}$ et pour la partie basse $\left(-1, n_S^d, \pi_1^d - n_S^d S_0 d\right)$ avec $n_S^d = \dfrac{\left(S_0ud-K\right)_+ - \left(S_0d^2-K\right)_+}{S_0d\left(u-d\right)}$. Pour la première partie de l'arbre il suffit de considérer que l'on a une option qui rapporte $\pi_1^u$ si le cours est monté et $\pi_1^d$ sinon. Ainsi, on obtient directement

$$\pi_0 = \frac{1}{1+r}\left(\pi_1^u\frac{1+r-d}{u-d}+\pi_1^d\frac{u-(1+r)}{u-d}\right) \quad \text{et} \quad n_S^0 = \frac{\pi_1^u-\pi_1^d}{S_0\left(u-d\right)}$$

La stratégie de réplication est alors $\left(-1, n_S^0, \pi_0 - n_S^0 S_0\right)$.

**Exercice :** Calculer le prix du call avec comme paramètres u=1.1, d=0.9, r=5%, $S_0$=20€, K=21€. Expliciter la stratégie de réplication.

**Correction :** D'après les formules:

$$p = 0.75,\ \pi_0 = 1.633\ ,\ \pi_1^u = 2.286\ ,\ \pi_1^d = 0\ ,\ n_s^0 = 0.5715\ ,\ n_S^u = 0.727\ ,\ n_S^d = 0$$

<u>*A t=0 :*</u> la stratégie est $\left(-1, 0.5715, -9.797\right)$ soit financièrement

- Vente de l'option, gain=+1.633
- Achat de 0.5715 actions, gain=-0.5715*20=-11.43
- Emprunt de -11.43+1.633=-9.797, gain=9.797

Valeur du portefeuille : 0

*A t=1* avec $S_1$=22: la stratégie est $(-1, 0.727, -13.708)$ soit financièrement

- Achat de $n_S^u - n_0 = 0.1555$ actions, gain=-0.1555*22=-3.421
- Remboursement de 9.797*1.05=10.287, gain=-10.287
- Emprunt de -10.287-3.421=13.708, gain=13.708$

Valeur du portefeuille : 0

*A t=1* avec $S_1$=18: la stratégie est $(-1, 0, 0)$ soit financièrement

- Revente de 0.5715 actions, gain=0.5715*18=10.287
- Remboursement de 9.797*1.05=10.287$ gain=-10.287

Valeur du portefeuille : 0

*A t=2* avec $S_2$=24.2 :

- Exercice de l'option, gain=-3.2
- Revente de 0.727 actions, gain=0.727*24.2=17.593
- Remboursement de 13.708*1.05=14.393, gain=-14.493

Valeur du portefeuille : 0

*A t=2* avec $S_2$=19.8 et $S_1$=22 :

- Non exercice de l'option, gain=0
- Revente de 0.727 actions, gain=0.727*19.8=14.493
- Remboursement de 13.708*1.05=14.393, gain=-14.493

Valeur du portefeuille : 0

*A t=2* avec ($S_2$=19.8 et $S_1$=22) ou $S_2$=16.2 :

- Non exercice de l'option, gain=0
- Revente de 0 actions, gain=0
- Remboursement de 0, gain=0

Valeur du portefeuille : 0

**Exercice :** Calculer la stratégie de réplication dans le cas du Put de prix d'exercice *K=19€* avec les mêmes données que l'exercice ci-dessus.