

Université d'Evry Val d'Essonne  
DESS d'Ingénierie Mathématique  
option Finance  
Introduction à la valorisation des produits  
financiers

Véronique Berger

version du 10 janvier 2006

## Contents

<b>I</b>	<b>Instruments financiers</b>	<b>5</b>
1	Définition	5
2	Typologie et principe d'évaluation	5
2.1	Actifs de base . . . . .	5
2.1.1	Actions . . . . .	5
2.1.2	Obligations . . . . .	5
2.1.3	Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA). . . . .	7
2.1.4	Change . . . . .	7
2.1.5	Matières premières . . . . .	12
2.1.6	Marché des produits de crédit . . . . .	12
2.1.7	Prix forward d'un actif . . . . .	12
2.2	Produits dérivés . . . . .	15
2.2.1	Call et Put sur actif . . . . .	17
2.2.2	Valorisation par réplication dans un univers à deux dates et deux états du monde : hypothèse AOA et existence d'une probabilité risque neutre . . . . .	18
2.2.3	Marché incomplet : un exemple de pricing par sur-réplication (TD) . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Evaluation en temps continu</b>	<b>24</b>

<b>3</b>	<b>Théorème de valorisation dans le cas monodimensionnel et avec coefficients de diffusion non stochastiques</b>	<b>25</b>
3.1	Contexte de valorisation . . . . .	25
3.1.1	Portefeuille autofinçant . . . . .	25
3.1.2	Opportunité d'arbitrage . . . . .	26
3.1.3	Prix de réplication . . . . .	26
3.2	Théorème . . . . .	26
3.2.1	Valorisation des actifs de base: . . . . .	26
3.2.2	Valorisation des actifs dérivés . . . . .	27
3.3	Démonstration . . . . .	27
3.3.1	Valorisation des actifs de base . . . . .	27
3.3.2	Valorisation des actifs dérivés . . . . .	28
3.3.3	Conclusion . . . . .	30
3.4	Analogies avec le modèle discret à une période . . . . .	30
3.5	Différences . . . . .	30
3.6	Formules Black et Sholes . . . . .	31
3.6.1	TD calcul du delta BS . . . . .	31
3.6.2	Prix du call . . . . .	32
3.6.3	Prix du put . . . . .	34
3.6.4	Prix forward d'un actif . . . . .	34
3.6.5	Prix BS du call et du put comme fonction du prix forward de l'actif. . . . .	36
3.6.6	Volatilité BS implicite et smile . . . . .	36
3.7	Valorisation d'autres options exotiques (les calculs qui suivent font en partie l'objet de TD) . . . . .	37
3.7.1	Digitale sur le sous-jacent S — 1ère méthode . . . . .	37
3.7.2	Digitale sur le sous-jacent S — 2ème méthode . . . . .	38
3.7.3	Digitale sur le sous-jacent S — 3ème méthode: portefeuille répliquant et valorisation en présence de smile . . . . .	39
3.7.4	Option barrière . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Construction de la stratégie: approche du trading</b>	<b>47</b>
4.1	Vente à découvert . . . . .	50
4.2	TD : achat d'un put ; . . . . .	53
4.3	TP : vente d'un call et couverture en temps discret . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Formule BS pour un sous-jacent versant des dividendes</b>	<b>57</b>
5.1	Actions . . . . .	57
5.1.1	Résolution de l'EDP de valorisation d'un call sur action . . . . .	58
5.2	Change . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Théorème de valorisation dans le cas multidimensionnel et avec coefficients de diffusion stochastiques</b>	<b>61</b>
6.1	Théorème . . . . .	62
6.1.1	Démonstration . . . . .	62
6.1.2	rappel . . . . .	64

6.2	Formule BS avec taux d'intérêt stochastique . . . . .	64
6.3	Prix forward d'un actif . . . . .	68
<b>III</b>	<b>Modèle de smile</b>	<b>68</b>
<b>7</b>	<b>Modèle log-décalé</b>	<b>69</b>
7.1	Valorisation d'un call. . . . .	70
7.1.1	Lien avec le modèle de taux Ho and Lee . . . . .	70
7.1.2	Remarques et exemples numériques . . . . .	71
<b>8</b>	<b>Modèle à volatilité locale non paramétrique : modèle dit de 'Dupire'</b>	<b>72</b>
8.1	Formule de Tanaka . . . . .	72
8.2	Application . . . . .	72
8.2.1	Equation de Focker-Plank . . . . .	72
8.2.2	EDP suivi par le prix des calls et équation de la vol locale	75
<b>9</b>	<b>Modèle SABR (Sigma Alpha Beta Rho)</b>	<b>75</b>

## Présentation du plan de cours

Le cours s'organise en 2 parties. Une première partie est dédiée à une introduction de notre problématique de valorisation des produits financiers et propose une description de ces produits et de leur principe de valorisation. La seconde et la troisième parties s'attachent à appliquer ces principes à la valorisation des produits dérivés et de présenter ainsi les méthodologies utilisées en salle des marchés.

# Part I

## Instruments financiers

### 1 Définition

Un actif ou instrument financier est un moyen d'effectuer des transferts intertemporels de richesse et de risque sur cette richesse. Ils permettent aux intervenants de s'échanger des flux financiers présents et futurs, connus ou encore incertains au moment de la mise en place de l'instrument financier.

### 2 Typologie et principe d'évaluation

La typologie utilisée habituellement distingue deux grands groupes d'actifs : les actifs de base et les actifs dérivés qui sont des actifs dérivés des actifs de base.

#### 2.1 Actifs de base

Dans le but de clarifier l'exposé, on se propose tout d'abord de dresser une liste des actifs de base. On distinguera 4 types d'actifs de base. Nous donnerons pour chacun une description et pour certains les principes de valorisation.

##### 2.1.1 Actions

Une action est un titre de propriété sur une entreprise qui donne droit entre autre au versement d'une partie des bénéfices futurs ou dividendes. Ces dividendes sont aléatoires dans la mesure où le montant n'est connu que peu avant le versement. L'acquéreur de l'action a donc échangé un flux  $A$ , le prix de l'action, au moment de l'acquisition de l'action contre un multitude de flux futurs incertains. Parmi ces flux futurs on peut compter le flux généré par le revente éventuelle du titre. Là encore le montant de ce flux de revente est inconnu au moment de la mise en place de l'acquisition de l'instrument financier.

Le prix d'une action aujourd'hui est donc la valeur accordée par les intervenants du marché aux flux futurs auxquels l'action leur donne droit. Ce prix fluctue jour après jour suivant l'anticipation que peuvent avoir les intervenants sur la hauteur de ces flux, leur variabilité et l'intérêt qu'ils y accordent. Le prix n'est pas le résultat d'une évaluation théorique mais la résultante d'un équilibre entre l'offre et la demande.

##### 2.1.2 Obligations

Une obligation est un titre de dette émis par une institution ou une entreprise. Il s'agit pour l'émetteur d'emprunter de l'argent par l'intermédiaire de titres négociables. Les flux futurs reçus par l'acquéreur de l'obligation sont calculés à

Figure 1: obligation zéro coupon



partir d'un taux fixe comme les OAT (Obligation assimilable du Trésor, obligation émise par l'Etat) ou de taux indexés sur l'inflation, par exemple.

De même que pour les actions les prix des obligations fluctuent en suivant un niveau changeant d'équilibre entre l'offre et la demande. En revanche, une évaluation théorique peut être utile pour mettre en relief des arbitrages possibles.

### Valorisation des obligations à coupon fixe

**Prix d'une obligation zéro coupon ou « strip »** Une obligation zéro coupon est un actif qui verse un flux fixe à une date future  $T$ . On peut résumer cet actif par le schéma 1:

100 est appelé nominal ou notionnel. Le prix en  $t$  de cet actif est formalisé par :

$$100 * B(t, T)$$

ou plus généralement

$$N * B(t, T)$$

avec  $N$  le notionnel de l'obligation zéro-coupon et  $B(t, T)$  le prix zéro-coupon. Introduisons la notion corollaire de taux zero-coupon  $R(t, T)$ , qui est le taux de rendement actuariel du zero-coupon. Il s'agit du taux auquel les 100 euros sont empruntés (ou prêtés) La formule qui le définit est la suivante :

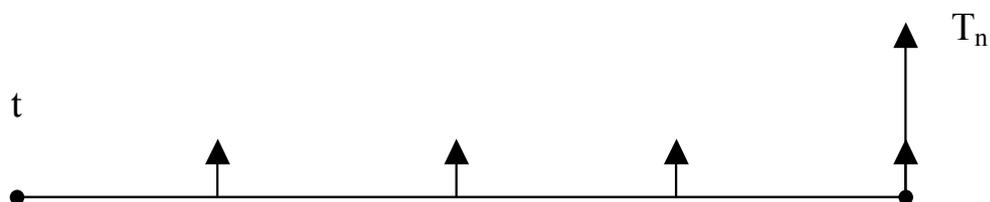
$$B(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^{(T-t)}}$$

**Remark 1** Les taux qui prévalent à chaque instant sur le marché résultent d'un équilibre entre l'offre et la demande de liquidité immédiate et à terme. Ils sont le reflet d'un équilibre macro économique qui s'établit entre les intervenants prêteurs et les intervenants emprunteurs.

**Prix d'une OAT à taux fixe** Lorsque l'Etat émet à  $t$  une obligation à taux fixe  $S$ , il emprunte un nominal  $N$  et s'engage en contrepartie à verser, généralement annuellement, un coupon que l'on notera  $C$  tel que

$$C = S * N$$

Figure 2: OAT



, et à rembourser le capital à la date d'échéance  $T_n$ . Le schéma des flux est donné par la figure 2. On peut considérer toute OAT comme une combinaison linéaire d'obligation zéro-coupon. Ainsi à chaque date  $\tau$  supérieure ou égale à  $t$ , il est possible d'évaluer l'obligation en considérant chacun des flux futurs comme celui d'une obligation zéro coupon. On a alors:

$$\begin{aligned}
 P_\tau &= \sum_{T_i > \tau} C * B(\tau, T_i) + NB(\tau, T_n) & (1) \\
 &= N \left[ \sum_{T_i > \tau} S * B(\tau, T_i) + B(\tau, T_n) \right]
 \end{aligned}$$

Le marché des OAT est en France un marché liquide : il est donc possible à tout moment, en interrogeant le marché, de connaître le prix des obligations existantes. Les prix recueillis et le formalisme de l'équation (1) permettent de calculer le prix des zero-coupon. On dit aussi «stripper la courbe des taux». Dans la mesure où le marché des strips ou zero-coupon est liquide il peut également apporter une information complémentaire. Mais le strip est en fait un produit dérivé des obligations qui sont la véritable source de valorisation des zéro-coupons.

Exercice 1 TD1

### 2.1.3 Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA).

**Definition 2** Une opportunité d'arbitrage est la possibilité donnée à un intervenant du marché de monter une opération à investissement nul lui rapportant dans le futur des gains toujours positifs et strictement positifs avec une probabilité non nulle.

Exercice 2 TD1

### 2.1.4 Change

Un taux de change est le prix d'une devise exprimé en une autre devise. Le prix en Yen d'un dollar était au 22 Janvier 2004 de 107. Cette valeur, qui résulte d'un

Figure 3: contrat d'achat à terme de 3 millions de dollars



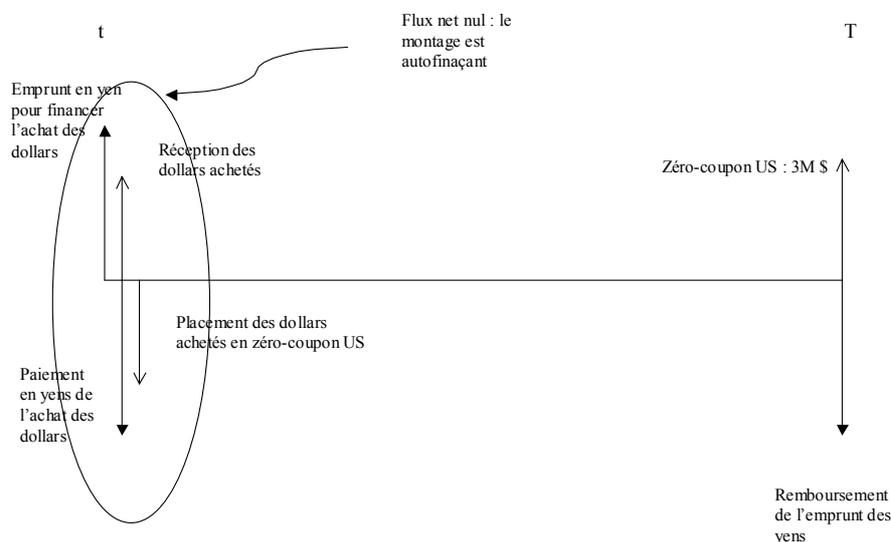
équilibre entre l'offre et la demande (dans le cadre de parité libre), fluctue jour après jour. Sur le marché des changes peuvent être aussi considérés comme actifs de base les contrat à terme de change. Il s'agit pour un intervenant d'acheter pour une date future déterminée dans le contrat une certaine quantité de devise à un prix préfixé. Supposons qu'un industriel japonais ait acheté des biens de production à un industriel Américain et ce pour un montant de 3 millions de dollars. Cet industriel japonais doit s'acquitter à la date  $T$  d'une facture en dollar d'un montant de  $3M$ . Nous sommes en  $t$  et notre acheteur japonais, pour ne pas subir de risque d'une dépréciation éventuelle du yen (hausse du prix du dollar en Yen, le dollar Yen passant pour fixer les idées de 107 à 120 ) décide de rentrer dans un contrat d'achat à terme de 3 millions de dollar. On peut résumer la transaction par le schéma 3.

Pour une valeur  $X$  particulière appelée taux de change à terme la transaction est à coût nul, c'est-à-dire qu'elle ne génère pas en  $t$  de paiement d'une contrepartie vers l'autre. Nous noterons par la suite cette valeur  $X(t,T)$ .

Une fois le contrat en place, notre acheteur japonais a l'assurance, mais également l'obligation, de pouvoir acheter à la date  $T$  les 3 millions de dollars nécessaires au règlement de sa facture pour une somme en Yen qui est fixée en  $t$ , et ce quelle que soit l'évolution de la parité dollar/yen.

**Principe d'absence d'opportunité d'arbitrage appliqué à la valorisation des contrats à terme de change** Quelle est la valeur de  $X(t,T)$  ? Pour répondre à cette question procédons en deux étapes : la mise en place d'une stratégie répliquante puis la mise en oeuvre du principe d'AOA.

Figure 4: Réplication d'un achat à terme de 3 millions de dollars — point de vue de la banque



**Mise en place d'une stratégie répliquante à base d'actifs de base: change spot et zéro-coupons (cf figure 4)** Pour garantir à l'acheteur japonais le versement de 3M de dollars au taux de change à terme  $X(t,T)$ , la banque qui a proposé l'actif met en place le montage suivant. Elle achète dès aujourd'hui sur le marché US un zéro coupon de nominal 3M et d'échéance T. En T elle recevra les 3M de dollars. Un tel zéro coupon lui coûte en t,

$$B^{US}(t, T) * 3M$$

dollars. Pour financer un tel achat elle s'endette en Yen à hauteur de

$$B^{US}(t, T) * 3M * X(t)$$

qu'elle devra rembourser en T pour un montant de

$$B^{US}(t, T) * 3M * X(t) / B^{JPY}(t, T)$$

Ce montage permet à la banque de mettre à disposition de son client les 3M de dollars à la date T. En contrepartie de ces 3M de dollars, la banque demandera à son client de lui verser en yen, toujours à la date T, la somme de

$$\frac{B^{US}(t, T) * 3M * X(t)}{B^{JPY}(t, T)}$$

somme qui permettra à la banque de rembourser sa dette en Yen. On a donc, dans le cadre de cette stratégie de répliquant

$$3M * X(t, T) = 3M * \frac{X(t)B^{US}(t, T)}{B^{JPY}(t, T)}$$

On obtient alors :

$$X(t, T) = \frac{X(t)B^{US}(t, T)}{B^{JPY}(t, T)}$$

**Mise en oeuvre du principe d'AOA** Pour valoriser les actifs sur les marchés liquides on fait l'hypothèse que sur ces marchés il y a AOA. Cette hypothèse se justifie par le fait que, sur les marchés liquides, les opportunités d'arbitrage sont très vite repérées par des arbitragistes et que le marché sous leur intervention se « rééquilibre » très rapidement avec les mécanismes que nous avons pu voir précédemment.

L'évaluation que nous allons faire ici de  $X(t, T)$  repose sur l'hypothèse que le marché des contrats à terme de change est bien arbitré, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Prouvons donc que cette valeur obtenue par réplication est la seule qui convienne sous l'hypothèse d'AOA, c'est-à-dire que si la banque, par erreur, proposait un contrat à terme avec taux de change à terme différent de  $X(t, T)$ , on aurait une opportunité d'arbitrage. Supposons que la banque propose un contrat à terme à valeur  $X' > X(t, T)$ . Alors il est possible d'effectuer le montage illustré par la figure 5.

L'arbitragiste met en place une combinaison de réplication de vente à terme de dollars (cf figure 4 : mais attention ici, celui qui met en place la stratégie de réplication n'est pas la banque, qui se couvrirait d'un contrat à terme passé avec un client, mais l'arbitragiste) et d'un contrat de vente à terme passé avec la banque au taux  $X'$ . Par construction l'investissement en  $t$  est nul. En revanche, il génère en  $T$  un flux strictement positif en Yen de

$$3M * X' - 3M * \frac{X(t)B^{US}(t, T)}{B^{JPY}(t, T)} = 3M * (X' - X(t, T)) > 0$$

Ce qui est incompatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Inversement on montre que si un intervenant propose un contrat à terme à  $X' < X(t, T)$  il est possible de l'arbitrer, c'est-à-dire de monter une opération financière à coût nul qui rapporte une somme positive avec une probabilité non nulle, en l'occurrence dans ce cas particulier à coup sûr.

En la présence d'une opportunité d'arbitrage, les arbitragistes auraient massivement acheté des dollars à terme (dans le cas  $X' < X(t, T)$ ) ou inversement vendu des dollars à terme (dans le cas  $X' > X(t, T)$ ) aux contreparties proposant  $X'$ . Ces contreparties s'apercevant que le prix qu'elles proposent suscite des demandes importantes réajustent leur prix, ce qui a pour effet « rééquilibrer » le marché vers la valeur  $X(t, T)$ .

**Exemple numérique des taux de change à terme sur données du 22 janvier 2004** Pour donner une idée concrète des taux forward que l'on peut

Figure 5: Stratégie d'arbitrage des contrats à terme de change – point de vue de l'arbitragiste

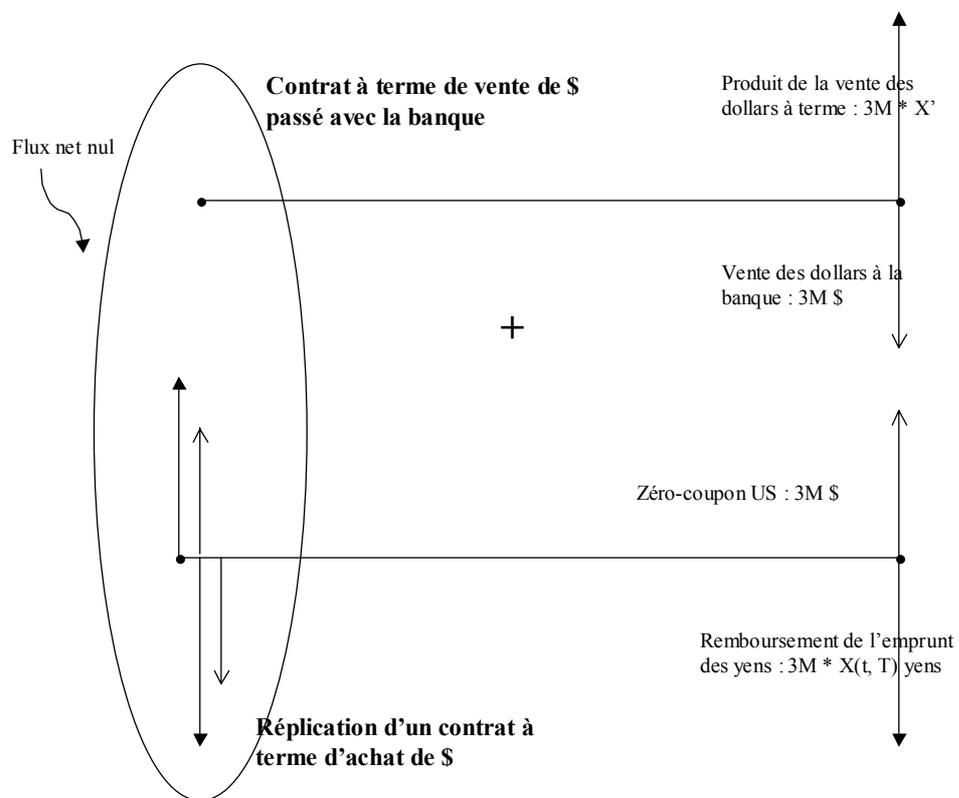


Figure 6: Dollar/Yen forward au 22 janvier 2004

date	22-janv-04	22-janv-05	22-janv-06	22-janv-07	22-janv-08	22-janv-09	22-janv-10	22-janv-11	22-janv-12
change forward	107	105	102	100	97	94	92	89	85

obtenir actuellement nous donnons figure 6 la valeur du taux de change forward pour différentes maturités. La date d'évaluation est le 22/01/04 Le premier taux de change donné est en fait le taux de change spot dollar/yen du 22 janvier.

On s'aperçoit sur ces valeurs que notre acheteur japonais en achetant à terme peut vouloir profiter de la faible cherté du dollar à terme.

### 2.1.5 Matières premières

Le marché des matières premières a vu le développement de produits financiers permettant aux acteurs de se couvrir contre les variations de prix. Il s'agit essentiellement de contrat de vente et d'achat à terme. Sur certains marchés ces contrats existent depuis très longtemps (marché à terme de métaux à Amsterdam au 18ème, marché à terme de céréale au Chigago Board of Trade au 19ème) et sur certains sont ils nouvellement apparus comme sur le marché de l'énergie (pétrole, gaz, électricité).

### 2.1.6 Marché des produits de crédit

Les Credit Default Swap ou CDS (cf figure 7)

Un CDS est un produit financier qui procure une assurance contre un événement de défaut d'une entreprise pré-définie. L'acheteur du CDS est l'acheteur de la protection contre le risque de défaut de l'entreprise. En cas de défaut il recevra une indemnité et en contrepartie il doit payer une prime, généralement tous les 3 mois ou tout les 6 mois jusqu'au défaut de l'entreprise, s'il y a lieu ou jusqu'à la maturité du CDS. Inversement le vendeur de la protection, le vendeur du CDS, reçoit la prime et paiera à l'acheteur une indemnité en cas de défaut.

### 2.1.7 Prix forward d'un actif

Nous sommes en  $t$  et l'on considère un actif  $S$  (une obligation ou une action) dont on veut déterminer le prix à terme en  $T(>t)$ .

Pour simplifier on considère que cet actif ne verse pas de coupon ou de dividendes entre  $t$  et  $T$ .

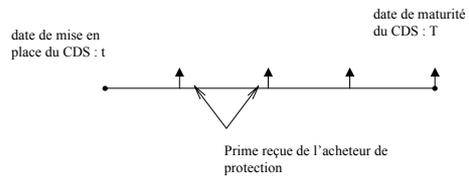
De même que dans le cas du change à terme nous plaçons sous AOA et raisonner en deux étapes : 1) établir un prix "de réplication", 2) conclure sur ce prix en utilisant l'hypothèse d'AOA.

**Réplication** Considérons que nous sommes une banque et qu'un client s'adresse à nous pour une vente à terme. Il nous faut donc monter une stratégie que l'on

Figure 7: cash flow d'un cds

Position du vendeur de protection

**En cas de non-défaut**



**En cas de défaut à une date  $t_{def} < T$**

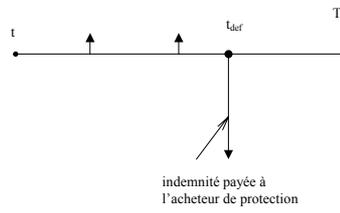


Figure 8: achat à terme - point de vue de la banque



représente par la figure 8 : nous sommes la banque et de notre point de vue nous effectuons un achat à terme de l'actif  $S$ .

Pour répliquer de tels flux, la banque va mettre en place une stratégie à base d'actifs de base qui sont ici, l'actif 'spot', et une opération de "repurchase agreement" dite aussi opération "repo".

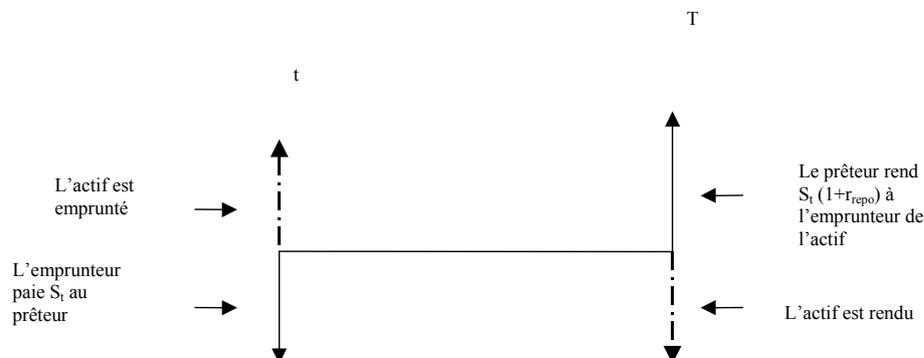
**Repurchase Agreement** Une opération de "repo" ou en anglais "repurchase agreement" consiste en l'achat (ou la vente) d'un actif assorti(e) de la revente (resp. du rachat) de cet actif. La revente ou le rachat s'effectue à une date et pour une valeur qui sont fixées au moment de la mise en place de l'opération. L'achat et la revente (ou symétriquement la vente et le rachat) s'effectue auprès de la même contrepartie. Cette opération est illustrée par la figure 9. Si l'on note  $S_t$  le prix d'achat/vente de l'actif,  $P_{repo}$  le prix de revente/rachat, le taux repo, noté  $r_{repo}$  est défini par l'égalité:

$$P_{repo} = S_t * (1 + r_{repo})$$

Nous venons de présenter les opérations de "repo" comme des opérations de prêt ou d'emprunt d'actif. Mais on peut renverser la perspective et les interpréter comme des des prêts en emprunts de "cash" avec nantissement. L'actif est alors en quelque sorte un bien hypothéqué qui garantit le prêteur de "cash" du remboursement à l'issue du prêt. Ce principe de nantissement qui donne une garantie au prêteur du cash explique que les taux "repo" sont généralement inférieurs aux taux auxquels l'emprunteur peut emprunter lorsqu'il le fait sans apporter de garantie au prêteur (emprunt par émission d'obligation).

**Réplication (suite) et conséquence de L'AOA** Nous (la banque) sommes dans une position d'achat à terme. Nous nous couvrons par une opération "repo" et par une vente "spot" ("spot" signifie que l'on exécute la vente immédiatement, c'est-à-dire en  $t$ ). Le montage, sa couverture et la résultante sont représentés

Figure 9: opération de "repo"



sur la figure 10. L'opération globale qu'effectue la banque est une opération qui en  $t$  ne lui génère aucun flux, donc aucun investissement et qui en  $T$  lui rapporte

$$P^f - S_t(1 + r_{repo})$$

Sous AOA une opération à investissement nul ne peut que rapporter 0. On a donc :

$$P^f = S_t(1 + r_{repo})$$

## 2.2 Produits dérivés

Les actifs dérivés sont de façon générale des contrats de vente ou d'achat d'actifs financiers de base sous des contraintes particulières. L'actif de base est alors appelé actif sous-jacent. Contrairement au chapitre précédent il ne vous sera pas proposé ici une description des différents actifs dérivés que l'on peut trouver sur les marchés financiers. Nous nous concentrerons plutôt sur les méthodes d'évaluation de ces produits. Nous commencerons par la description et l'évaluation d'un actif dérivé simple : l'option d'achat ou de vente. La méthode d'évaluation repose sur:

- une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, analogue à celle que nous avons vue pour l'évaluation du taux de change à terme;
- une modélisation de l'évolution du cours du sous-jacent, modélisation dont nous n'avons pas eu besoin pour l'évaluation du taux de change à terme.

Les méthodes d'évaluation effectivement utilisées sur les marchés, proposent une modélisation des cours des sous-jacents par un processus en temps continu. Avant d'exposer cette méthode, et pour mieux comprendre les principes

Figure 10: Montage complet de la banque : contrat à terme et couverture – point de vue de la banque

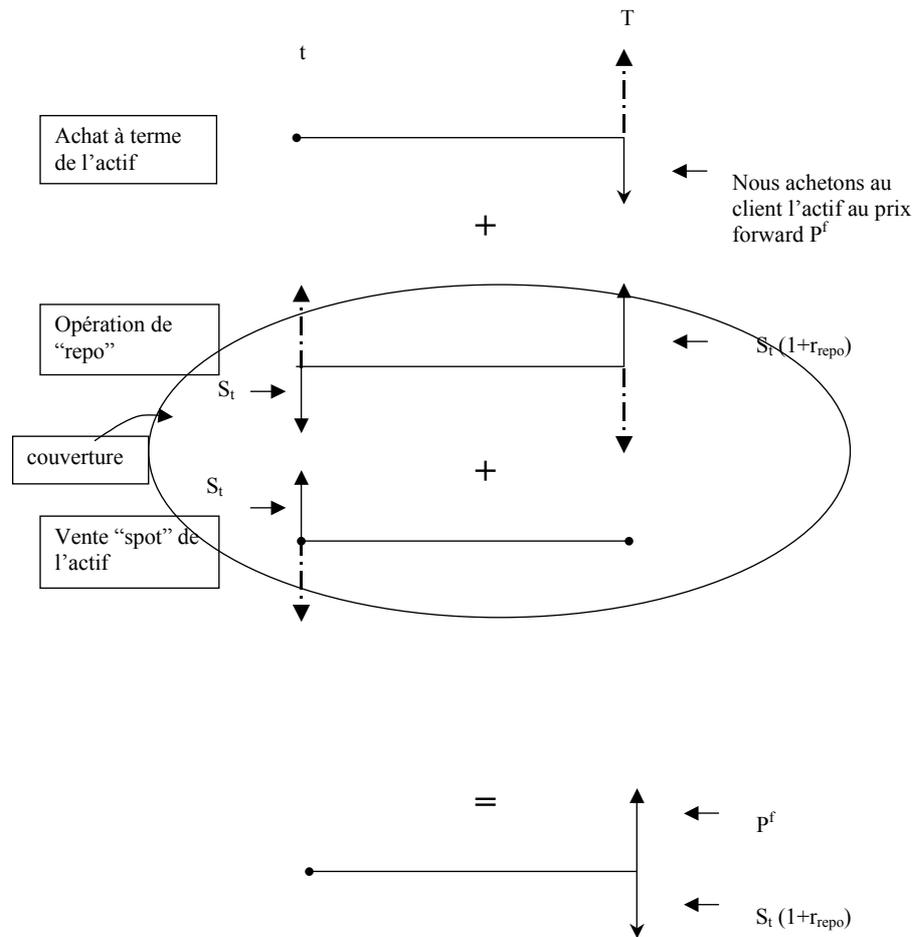
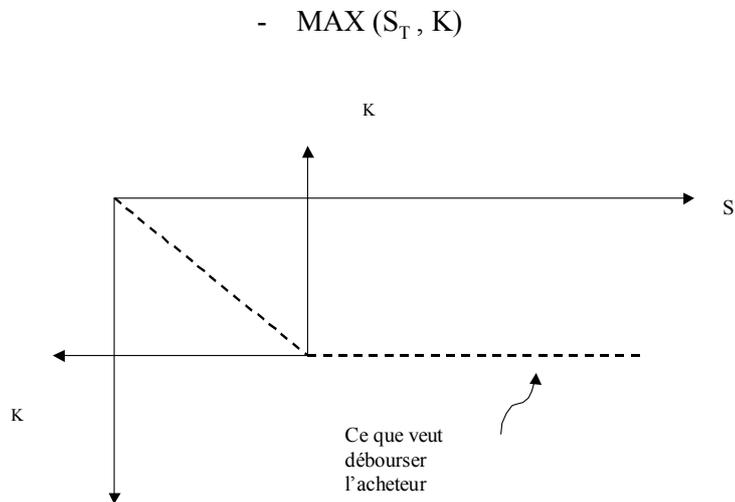


Figure 11: Achat avec couverture en cas de hausse de prix



qui sous tendent l'évaluation des produits dérivés, nous commencerons par des modélisations du sous-jacent plus simples. Ce chapitre sur les produits dérivés s'organisera de la façon suivante.

- Une description de notre produit de référence : l'option d'achat ou "call" en anglais.
- Une évaluation de ce produit dans un univers discret à une période et deux états du monde.

La valorisation en temps continu sera abordée dans la seconde partie du cours.

### 2.2.1 Call et Put sur actif

Un call sur un actif donne à son détenteur la possibilité d'acheter, mais non l'obligation, à une date fixée l'actif à un prix  $K$  convenu à l'avance. Il va permettre à un intervenant qui sait devoir acquérir cet actif à une date future de se couvrir contre une hausse éventuelle du cours. A la date  $T$  d'acquisition, le détenteur de l'option veut déboursier, pour acheter l'actif,  $\text{MIN}(S_T, K)$  comme illustré par la figure 11.

Pour avoir l'assurance de ne payer que  $\text{MIN}(S_T, K)$ , l'agent qui désire se couvrir, achète un produit financier, un call, qui lui versera 0 si l'actif sous-jacent vaut moins que  $K$  et  $S_T - K$  sinon et donc synthétiquement  $\text{MAX}(S_T - K, 0)$ . Soit graphiquement ce que nous pouvons voir sur la figure 12.

Figure 12: Payoff d'un call – point de vue du détenteur du call

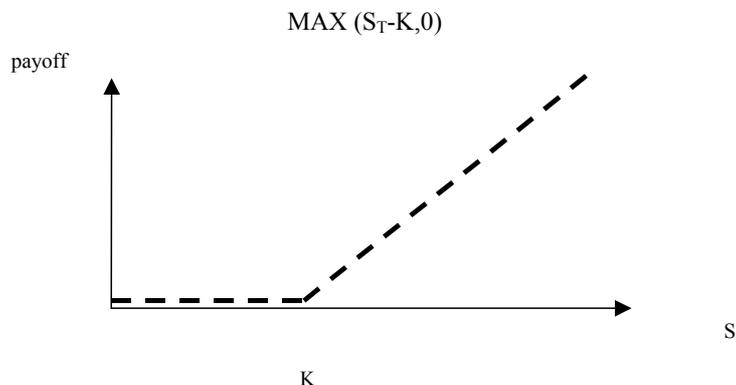
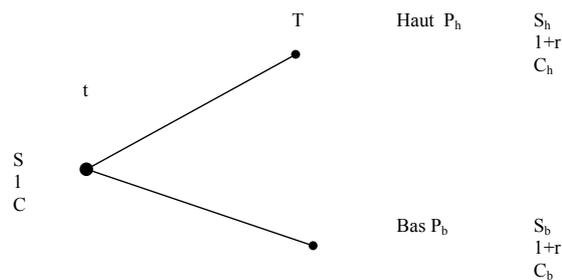


Figure 13: Modèle à 1 période et deux états



### 2.2.2 Valorisation par réplication dans un univers à deux dates et deux états du monde : hypothèse AOA et existence d'une probabilité risque neutre

**Un univers à deux dates et deux états du monde** Nous sommes en  $t$  et l'on admet que notre univers de valorisation puisse être représenté par deux dates  $t$  et  $T$  et deux états du monde en  $T$ , un état « haut » et un état « bas ».

Dans cet univers de valorisation nous disposons de deux actifs de base : un actif sans risque et un actif risqué. L'actif sans risque est un placement zéro-coupon au taux  $r$ . On le normalise de façon qu'en  $t$  sa valeur soit 1. En  $T$  il vaudra donc  $(1+r)^{T-t}$  et ce, quel que soit l'état du monde. Si pour simplifier on choisit  $T-t = 1$ , alors en  $T$  l'actif sans risque vaut  $1+r$ . L'actif risqué qui vaut  $S$  en  $t$  vaudra  $S_h$  dans l'état haut et  $S_b$  dans l'état bas avec  $S_h > S_b$ . La probabilité pour que l'état du monde "haut" (resp. "bas") se réalise est  $P_h$

(resp.  $P_b$ ) .

**Remark 3** *l'inégalité  $S_h > S_b$  est stricte. Si l'on a l'égalité l'actif est un actif sans risque et l'opportunité d'une option ne se pose pas.  $P_{i=h,b} \in ]0, 1[$ . Le cas où l'un des deux coefficients vaut 1 est un cas dégénéré où l'opportunité d'une option ne se pose pas non plus.*

**Notre objectif** L'objectif de cette section est double. Il est tout d'abord de valoriser notre call sous l'hypothèse AOA et plus généralement de montrer l'équivalence :

$$\text{AOA} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{il existe une probabilité } Q \text{ dite "risque neutre" équivalente} \\ \text{à la probabilité historique sous laquelle les prix actualisés} \\ \text{des actifs, actifs de base et actifs dérivés, sont des martingales} \end{array} \quad (2)$$

**valorisation du call** Nous allons procéder pour valoriser notre call comme nous l'avons fait pour l'évaluation du taux de change forward : évaluer un prix de réplication puis utiliser l'AOA pour conclure.

Par combinaison linéaire de ces deux actifs, il est facile de répliquer le payoff du call

les contraintes sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha * (1 + r) + \beta * S_h &= \text{MAX}(S_h - K, 0) \\ \alpha * (1 + r) + \beta * S_b &= \text{MAX}(S_b - K, 0) \end{aligned}$$

Soit, si l'on note

- $C_h = \text{MAX}(S_h - K, 0)$

et

- $C_b = \text{MAX}(S_b - K, 0)$

$$\begin{aligned} \alpha * (1 + r) + \beta * S_h &= C_h \\ \alpha * (1 + r) + \beta * S_b &= C_b \end{aligned}$$

Le système se résout de la façon suivante

$$\begin{aligned} \beta &= (C_h - C_b)/(S_h - S_b) \\ \alpha &= [C_h - S_h * (C_h - C_b)/(S_h - S_b)]/(1 + r) = [C_b S_h - C_h S_b]/[(S_h - S_b) * (1 + r)] \end{aligned}$$

Le prix de réplication de notre option est alors donnée par

$$\begin{aligned} C &= \alpha * 1 + \beta * S \\ &= [C_b S_h - C_h S_b]/[(S_h - S_b) * (1 + r)] + (C_h - C_b)/(S_h - S_b) * S \end{aligned}$$

Que l'on peut réécrire en fonction des payoffs  $C_h$  et  $C_b$  et de coefficients pondérateurs  $\Pi_h$  et  $\Pi_b$  :

$$\boxed{C = [\Pi_h * C_h + \Pi_b * C_b]/(1+r)} \quad (3)$$

Avec

- $\Pi_h = [S*(1+r) - S_b] / (S_h - S_b)$

et

- $\Pi_b = -[S*(1+r) - S_h] / (S_h - S_b)$

En fin l'hypothèse d'AOA nous permet de conclure : le prix du call est son prix de réplcation, soit donc  $C$ .

Par ailleurs on remarque que:

$$\boxed{S = [\Pi_h * S_h + \Pi_b * S_b]/(1+r)} \quad (4)$$

ainsi que

$$\boxed{1 = [\Pi_h * (1+r) + \Pi_b * (1+r)]/(1+r)} \quad (5)$$

### Propriétés des coefficients pondérateurs et mise en relief d'une probabilité risque neutre

**Montrons que  $\Pi_b = 1 - \Pi_h$  et que  $\Pi_{i=h,b} \in ]0, 1[$**

$$\begin{aligned} \Pi_b &= [S * (1+r) - S_h]/(S_h - S_b) \\ &= [S * (1+r) - S_h + S_b - S_b]/(S_h - S_b) \\ &= 1 - \Pi_h \end{aligned}$$

Pour montrer que  $\Pi_b \in ]0, 1[$  partons de

$$\Pi_b = -[S * (1+r) - S_h]/(S_h - S_b)$$

Pour montrer  $\Pi_b \in ]0, 1[$  il nous suffit de montrer que

$$S_b < S * (1+r) < S_h$$

Montrons que l'on ne peut pas avoir  $S * (1+r) \leq S_b$

Si l'on a  $S * (1+r) \leq S_b$  alors on a  $S * (1+r) \leq S_b < S_h$ . On est donc en présence d'un actif qui rapporte systématiquement plus que l'actif sans risque et strictement plus avec une probabilité non nulle. Il y a alors une opportunité d'arbitrage révélé par la stratégie d'investissement suivante: on emprunte au taux sans risque et l'on place l'argent emprunté sur l'actif S. L'investissement en t est nul et le revenu en T est positif et strictement positif dans l'état du

monde "haut", c'est-à-dire avec une probabilité non nulle. Conclusion en AOA on ne peut pas avoir  $S * (1 + r) \leq S_b$ .

De la même façon le lecteur montrera en s'appuyant sur l'hypothèse AOA que l'on ne peut pas avoir  $S_h \leq S * (1 + r)$

Conclusion

$$\boxed{\begin{array}{l} \Pi_b = 1 - \Pi_h \\ \Pi_{i=h,b} \in ]0, 1[ \end{array}}$$

**Probabilité risque neutre**  $\Pi_{i=h,b}$  peut s'interpréter comme une probabilité. Cette probabilité est appelée probabilité risque neutre et notée  $Q$ .  $\Pi_{i=h,b} \in ]0, 1[$  entraîne que  $Q$  est équivalente à la probabilité d'observation, que l'on notera  $P$  et que l'on avait précédemment caractérisée par  $P_{i=h,b}$ . Dans cette nouvelle perspective réécrivons les équations (3),(4) et (5).

$$S_t = E^Q\left(\frac{S_T}{1+r}\right)$$

$$C_t = E^Q\left(\frac{C_T}{1+r}\right)$$

Et trivialement . . . .

$$1 = E^Q\left(\frac{(1+r)}{(1+r)}\right)$$

Que vient on d'obtenir? On vient de montrer que sous l'hypothèse AOA les différents prix de notre marché s'établissent par l'espérance, sous une probabilité  $Q$  équivalente à  $P$ , des gains actualisés. Ou encore, que les prix actualisés de nos actifs sont des martingales sous  $Q$ .

Où a t'on utilisé l'hypothèse AOA ? On l'utilise par deux fois.

- lorsque l'on déclare que le prix de notre option est le prix du portefeuille répliquant. En effet l'on montre en raisonnant comme nous avons fait pour le taux de change forward, que si le prix de l'option n'est pas le prix du portefeuille répliquant alors il y a une opportunité d'arbitrage.
- pour montrer que  $Q$  est équivalente à  $P$ .

Quelques mots supplémentaires sur  $Q$ . Elle est appelée probabilité risque neutre. Rappelons-nous que pour obtenir le prix aujourd'hui d'un flux fixe  $C$  dans le futur il nous suffisait de l'actualiser. La probabilité risque neutre permet d'étendre cette méthodologie à la valorisation de flux dont les montants ne seront connus que lors du paiement : on actualise et l'on somme les différents états du monde en les pondérant par la probabilité risque neutre.

Enfin il est important de souligner que cette probabilité n'est pas la probabilité historique. La probabilité historique n'intervient pas pour la valorisation du call. Pour donner à  $Q$  une interprétation économique, introduisons deux actifs

élémentaires: un actif « haut » qui paie 1 Euro dans l'état haut et 0 sinon; un actif « bas » paie 1 Euro dans l'état bas et 0 sinon. On montre facilement que le prix de l'actif haut est  $\Pi_h/(1+r)$  et que le prix de l'actif bas est  $\Pi_b/(1+r)$ . Ces actifs sont appelés prix d'Arrow Debreu. Ils forment la base canonique de tous les payoffs possibles de notre monde simplifié.  $\Pi_h$  et  $\Pi_b$  sont en fait (au discount près) plus des prix qu'une véritable probabilité.

En conclusion nous venons de montrer

AOA  $\Rightarrow$  il existe une probabilité Q dite "risque neutre" équivalente à la probabilité historique sous laquelle les prix des actifs, actifs de base et actifs dérivés, sont des martingales

**Montrons la réciproque.** Partons donc de l'hypothèse que tout payoff se valorise par l'utilisation d'une probabilité risque neutre équivalente à la proba historique. Montrons qu'alors une opportunité d'arbitrage n'est pas possible. Dans notre monde simplifié, une opportunité d'arbitrage est une stratégie de valeur nulle en t et générant en T un flux toujours positif et strictement positif dans au moins un état du monde. Soit donc une stratégie qui génère en T un flux toujours positif et strictement positif dans au moins un état du monde. Montrons que la valeur en t d'un tel montage est strictement positif. Pour fixer les idées notons  $f_h$  le flux en l'état "haut" et  $f_b$  le flux en l'état "bas" avec  $f_{i=h,b} \geq 0$  et  $f_h > 0$ . Le prix en t de cette stratégie est donné par :

$$F = \Pi_h \frac{f_h}{1+r} + \Pi_b \frac{f_b}{1+r}$$

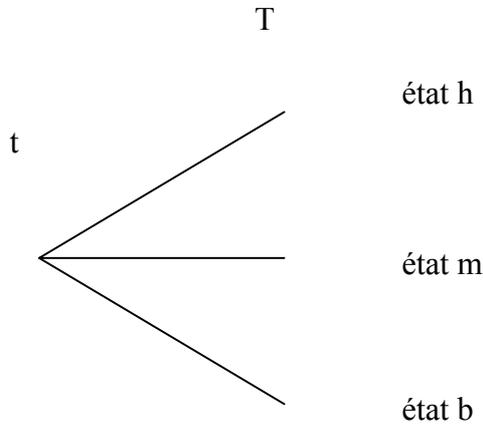
Sous les hypothèses  $\Pi_{i=h,b} \in ]0, 1[$ , F est donc strictement positif. En conséquence sous l'hypothèse d'existence d'une probabilité risque neutre équivalente à la probabilité historique il ne peut y avoir d'opportunité d'arbitrage.

### 2.2.3 Marché incomplet : un exemple de pricing par sur-réplication (TD)

Nous partons du modèle simple à une période mais cette fois on considère qu'au temps T 3 états du monde distincts peuvent survenir. 2 actifs liquides sont présents sur le marché : il s'agit d'un actif sans risque, qui vaut 1 en t et qui vaut  $(1+r)$  en T, et ce, quel que soit l'état du monde, et d'un actif S qui vaut  $S_t$  en t et  $S_i$  en T, avec  $i = h, m$  ou  $b$ . Le tout est illustré figure 14. Nous prendrons  $r = 0$  et

$$\begin{aligned} S_t &= 3 \\ S_h &= 4 \\ S_m &= 2 \\ S_b &= 1. \end{aligned}$$

Figure 14: Marché incomplet



Un trader reçoit une demande de quotation pour un actif  $X$  qui génère en  $T$  un flux  $X_i = h, m, b$  avec

$$\begin{aligned} X_h &= 2 \\ X_m &= 1 \\ X_b &= 1. \end{aligned}$$

Dans le cadre du modèle à deux états du monde et deux actifs liquides la méthodologie d'évaluation consistait à bâtir à partir de l'actif sans risque et l'actif risqué  $S$  liquide un portefeuille répliquant le payoff du call que nous avions à évaluer. Ici cela n'est plus possible.

Supposons que soit demandé au trader de vendre cet actif  $X$ . L'objet du TD est de déterminer la valeur  $X_t$  à laquelle le trader acceptera de vendre l'actif  $X$ .

**Question 1** Montrer en quoi le trader ne peut pas répliquer parfaitement  $X$  à partir de l'actif sans risque et de  $S$ .

Les objectifs du trader sont les suivants : se couvrir totalement et proposer sous cette contrainte de couverture le prix le plus attractif possible. Autrement dit, avec l'argent de la prime(=  $X_t$ ) que lui versera son client, le trader compte acheter un portefeuille combinant l'actif sans risque et l'actif  $S$  tel que, quel que soit l'état du monde, son portefeuille lui rapporte en  $T$  plus qu'il ne doit reverser à l'acheteur de l'actif  $X$ . Le trader doit toutefois « optimiser » son portefeuille de façon à demander à son client la prime la plus faible possible.

**Question 2** Ecrire le programme d'optimisation linéaire correspondant aux objectifs du trader.

Rappel de programmation linéaire

Introduisons les notations :

- $I = \{i : i = 1, 2, \dots, m\}$        $J = \{j : j = 1, 2, \dots, n\}$
- $x$  et  $c$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$
- $y$  et  $b$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^m$
- $A$  une matrice de  $M_{n,m}(\mathbb{R})$

Par  $I_1$  on note une partie des indices de  $I$ , c'est-à-dire que  $I_1 \subset I$  et  $I_2 = I \setminus I_1$ .  
 D'une façon analogue,  $J_1 \subset J$  et  $J_2 = J \setminus J_1$ .

Les deux problèmes d'optimisation linéaires sous contraintes mixtes :

$$\begin{array}{ll}
 PB1 & Min \langle c, x \rangle \\
 \text{Sous} & \begin{array}{ll}
 (\overset{x}{Ax})_i \geq b_i & i \in I_1 \\
 (Ax)_i = b_i & i \in I_2 \\
 x_j \geq 0 & j \in J_1
 \end{array}
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll}
 PB2 & Max \langle b, y \rangle \\
 \text{Sous} & \begin{array}{ll}
 (\overset{y}{A^T y})_j \leq c_j & j \in J_1 \\
 (A^T y)_j = c_j & j \in J_2 \\
 y_j \geq 0 & j \in I_1
 \end{array}
 \end{array}$$

se nomment problèmes duaux avec contraintes mixtes. On montre que si l'ensemble admissible de  $PB1$  est vide, il en va de même pour  $PB2$ , et inversement. Par ailleurs si l'on note  $x^*$  et  $y^*$  les solutions du  $PB1$  et de  $PB2$  alors on a  $\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle$

**Question 3** Ecrire le dual du programme d'optimisation obtenu à la question 2. L'interpréter en introduisant le concept de probabilité risque neutre.

**Question 4** Résoudre les systèmes de la question 2 et 3

## Part II

# Evaluation en temps continu

### 3 Théorème de valorisation dans le cas monodimensionnel et avec coefficients de diffusion non stochastiques

#### 3.1 Contexte de valorisation

Nous sommes en temps continu et l'on se place dans un univers à horizon fini  $T$ . Nous sommes en  $t$ . Sur le marché coexistent deux actifs liquides (actifs de base): l'actif sans risque  $M$  et un actif risqué  $S$ . On travaille sur un intervalle de temps  $[t, T]$  et un espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$ . Les prix de ces deux actifs suivent, sous la probabilité  $P$ , dite probabilité historique, les diffusions suivantes :

$$\begin{array}{l} \frac{dM_\tau}{M_\tau} = r d\tau \\ \frac{dS_\tau}{S_\tau} = \mu d\tau + \sigma dW^P \end{array}$$

où  $W$  est un brownien sous  $P$  et dont  $F$  est la filtration naturelle.  $\mu, r, \sigma$  sont des paramètres constants. Enfin on introduit les notions de portefeuille autofinçant, d'opportunité d'arbitrage et de prix de réplication de la façon suivante.

#### 3.1.1 Portefeuille autofinçant

Un portefeuille autofinçant est un couple  $(\alpha_\tau, \beta_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  de processus  $F_\tau$ -adaptés tels que:

$$1) \int_t^T |\alpha_s| ds < +\infty \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty \text{ p.s.}$$

et

$$2) \forall \tau \in [t, T]$$

$$\boxed{\alpha_\tau M_\tau + \beta_\tau S_\tau = \alpha_t M_t + \beta_t S_t + \int_t^\tau \alpha_s dM_s + \int_t^\tau \beta_s dS_s} \quad (6)$$

qui s'écrit également

$$d(\alpha_s M_s + \beta_s S_s) = \alpha_s dM_s + \beta_s dS_s$$

remarque: on remarquera que les conditions 1) permettent d'assurer l'existence d'un processus défini par  $\int_t^\tau \alpha_s dM_s + \int_t^\tau \beta_s dS_s$ . En effet pour que  $\int_t^\tau \beta_s dS_s$  ait un sens il faut que  $\int_t^\tau \beta_s S_s \mu ds + \int_t^\tau \beta_s S_s \sigma dW_s^P$  soit défini. Or pour que

$\int_t^T \beta_s S_s \mu ds$  soit défini il suffit que  $\int_t^T (\beta_s S_s \mu)^2 ds < +\infty$  p.s. Puisque pour tout  $\omega \in \Omega$  la fonction  $s \rightarrow S_s(\omega)$  est continue sur  $[t, T]$  alors  $S_s(\omega)$  est borné  $[t, T]$ . Ainsi

$$\int_t^T (\beta_s S_s \mu)^2 ds < +\infty p.s \iff \int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty p.s$$

ce qui est assuré par 1) Même remarque pour le terme  $\int_t^T \beta_s S_s \mu ds$  et le terme  $\int_t^T \alpha_s dM_s$

En posant  $\widetilde{S}_\tau = S_\tau/M_\tau$  on peut réécrire la condition 2) en une condition 2bis) équivalente:

2bis)  $\forall \tau \in [t, T]$

$$\boxed{\alpha_\tau + \beta_\tau \widetilde{S}_\tau = \alpha_t + \beta_t \widetilde{S}_t + \int_t^\tau \beta_s d\widetilde{S}_s} \quad (7)$$

qui s'écrit également

$$d(\alpha_s + \beta_s \widetilde{S}_s) = \beta_s d\widetilde{S}_s$$

### 3.1.2 Opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage est stratégie de d'investissement construite à base d'un portefeuille autofinçant et telle que:

- $\text{Proba}^P(\alpha_t M_t + \beta_t S_t = 0) = 1$
- $\text{Proba}^P(\alpha_T M_T + \beta_T S_T < 0) = 0$
- $\text{Proba}^P(\alpha_T M_T + \beta_T S_T > 0) > 0$

### 3.1.3 Prix de réplcation

Soit un actif  $C$  payant  $h(S_T)$  en T. On appelle prix de réplcation le prix d'un portefeuille autofinçant dont la valeur est égale à  $h(S_T)$  en T.

## 3.2 Théorème

### 3.2.1 Valorisation des actifs de base:

Il existe une probabilité Q équivalente à P telle que:

$$\begin{aligned} M_t &= E^Q[\exp[-r(T-t)] M_T / F_t] \\ S_t &= E^Q[\exp[-r(T-t)] S_T / F_t] \end{aligned}$$

### 3.2.2 Valorisation des actifs dérivés

Soit un actif  $C$  payant  $h(S_T)$  en  $T$  et tel que  $E^Q [h^2(S_T)/F_t] < +\infty$  et  $E^Q [h(S_T)/F_\tau]$  est continue en  $\tau$ . Alors, sous AOA, le prix de réplication de  $C$  est unique et, par ailleurs, si l'on note  $C_t$  ce prix, on a

$$C_t = E^Q [\exp[-r(T-t)] h(S_T)/F_t]$$

$C_t$  est appelé prix d'arbitrage de l'actif  $C$ .

### 3.3 Démonstration

#### 3.3.1 Valorisation des actifs de base

On montre tout d'abord par le théorème de Girsanov qu'il existe une probabilité  $Q$  équivalente à la probabilité historique  $P$  telle que sous  $Q$

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = r d\tau + \sigma dW^Q$$

où  $W_\tau^Q$  est un brownien sous  $Q$ .

Partons de

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = \mu d\tau + \sigma dW^P$$

que l'on réécrit en

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = (r + \mu - r) d\tau + \sigma dW^P \quad (8)$$

Définissons le processus  $W_\tau^Q$  par

$$dW_\tau^Q = (\mu - r) d\tau + \sigma dW_\tau^P$$

soit

$$W_\tau^Q = W_\tau^P + \int_t^\tau \theta ds$$

avec  $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$  et

$$L_\tau = \exp \left[ - \int_t^\tau \theta dW_s^P - \frac{1}{2} \int_t^\tau \theta^2 ds \right]$$

$L_\tau$  est une martingale sous  $P$  car

$$E^P \left[ \exp \left[ \frac{1}{2} \int_t^T \theta^2 ds \right] / F_t \right] = \exp \left[ \frac{1}{2} \theta^2 (T - t) \right] < +\infty$$

Alors sous la probabilité  $Q$  de densité  $L_T$  par rapport à  $P$ , équivalente à  $P$  du fait de la positivité stricte de  $L_T$ ,  $W_\tau^Q$  est un mouvement brownien standard. On peut alors réécrire l'équation (8) en:

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = r d\tau + \sigma dW^Q \quad (9)$$

En intégrant l'équation (9) on obtient

$$S_T = S_t \exp \left( r(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma (W_T^Q - W_t^Q) \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} E^Q [\exp [-r(T-t)] S_T / F_t] &= E^Q \left[ \exp [-r(T-t)] S_t \exp \left( r(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma (W_T^Q - W_t^Q) \right) \right] \\ &= S_t \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right) E^Q \left[ \sigma (W_T^Q - W_t^Q) / F_t \right] \\ &= S_t \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que:

$$S_t = E^Q [\exp [-r(T-t)] S_T / F_t]$$

Sous  $Q$  la diffusion du prix de  $M$  est inchangé soit:

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r d\tau$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M_t &= E^Q [\exp [-r(T-t)] M_T / F_t] \\ S_t &= E^Q [\exp [-r(T-t)] S_T / F_t] \end{aligned}$$

### 3.3.2 Valorisation des actifs dérivés

**Existence du portefeuille répliquant** Posons:

$$A_\tau = E^Q \left[ \frac{\exp^{-r(T-t)}}{M_t} h(S_T) / F_\tau \right]$$

Par construction  $A$  est une martingale sous  $Q$ . qui vaut  $\frac{\exp^{-r(T-t)}}{M_t} h(S_T)$  en  $T$ . Par ailleurs puisque nous nous sommes restreints aux fonctions payoff  $h$  tels que  $E^Q [h(S_T) / F_\tau]$  est continue en  $t$  alors  $A_\tau$  est une martingale continue. Le théorème de représentativité des martingales nous permet de dire qu'il existe un processus  $F$ -adapté<sup>1</sup>  $(K_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  tel que

$$A_\tau = A_t + \int_t^\tau K_s dW_s^Q \quad (10)$$

<sup>1</sup>la filtration naturelle de  $W^Q$  est aussi la filtration naturelle de  $W^P$ .

avec  $\int_t^T K_s^2 ds < +\infty$  p.s. L'équation (10) se réécrit:

$$A_\tau = A_t + \int_t^\tau \beta_s d\tilde{S}_s \quad (11)$$

avec  $\beta_s = \frac{K_s}{\sigma \tilde{S}_s}$ . Posons  $\alpha_\tau = A_\tau - \beta_\tau \tilde{S}_\tau$ . On remarque alors que l'équation (11) s'écrit encore

$$\alpha_\tau + \beta_\tau \tilde{S}_\tau = \alpha_t + \beta_t \tilde{S}_t + \int_t^\tau \beta_s d\tilde{S}_s$$

et que donc  $(\alpha_\tau, \beta_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  vérifie les conditions d'autofinancement 2bis). Par ailleurs la valeur en  $\tau$  du portefeuille définit par  $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$  vaut:

$$V_\tau = \left( \alpha_\tau + \beta_\tau \tilde{S}_\tau \right) M_\tau = A_\tau M_\tau = E^Q \left[ \exp^{-r(T-\tau)} h(S_T) / F_\tau \right]$$

En particulier, en T, on a une parfaite répliquation du payoff de C:

$$V_T = \frac{\exp^{-r(T-t)}}{M_t} h(S_T) * M_T = h(S_T)$$

puisque l'intégration de  $\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r d\tau$  nous donne  $M_T = M_t \exp^{-r(T-t)}$ .

Montrons, pour conclure sur l'existence d'un portefeuille autofinçant répliquant C en T, que les conditions d'intégrabilité 1) sont vérifiées. Puisque  $\int_t^T K_s^2 ds < +\infty$  p.s. alors  $\int_t^T \beta_s^2 \sigma^2 \tilde{S}_s^2 ds < +\infty$  p.s. ou encore  $\int_t^T \beta_s^2 S_s^2 ds < +\infty$  p.s. Par ailleurs  $(S_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  étant continu sur  $[t, T]$  p.s.,  $(S_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  est borné sur  $[t, T]$  p.s. et donc

$$\int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty \text{ p.s.}$$

Par ailleurs  $\int_t^T |\alpha_s| ds \leq \int_t^T |A_s| ds + \int_t^T |\beta_s \tilde{S}_s| ds$ .  $(A_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  étant continu sur  $[t, T]$  p.s.,  $(A_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  est borné sur  $[t, T]$  p.s. et donc  $\int_t^T |A_s| ds$  l'est également.

Enfin par  $\int_t^T |\beta_s \tilde{S}_s| ds \leq \sqrt{\int_t^T \beta_s^2 ds} \sqrt{\int_t^T \tilde{S}_s^2 ds}$  et du fait que  $\int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty$  p.s. ainsi que  $\int_t^T \tilde{S}_s^2 ds < +\infty$  p.s. car  $(S_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  est borné sur  $[t, T]$  p.s., on a:

$$\int_t^T |\alpha_s| ds < +\infty \text{ p.s.}$$

**Unicité** Montrons que sous AOA les portefeuilles répliquant C en T ont une valeur identique en t.

Faisons l'hypothèse qu'il existe deux portefeuilles autofinancants définis par  $(\alpha_\tau, \beta_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  et  $(\gamma_\tau, \delta_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$  répliquants C en T et tels que:

$$\alpha_t M_t + \beta_t S_t > \gamma_t M_t + \delta_t S_t$$

Posons

$$\varepsilon = (\alpha_t M_t + \beta_t S_t) - (\gamma_t M_t + \delta_t S_t) \quad (12)$$

Montons alors la stratégie définie par  $(\varepsilon + \gamma_t - \alpha_\tau, \delta_t - \beta_\tau)_{t \leq \tau \leq T}$ . On vérifie aisément que cette stratégie d'investissement est un portefeuille autofinancant de valeur nulle en t, du fait de l'équation (12), et de valeur  $\varepsilon M_T$  en T et donc strictement positive avec probabilité non nulle. Il s'agit donc d'une opportunité d'arbitrage. Ainsi sous AOA on ne peut avoir que:

$$\alpha_t M_t + \beta_t S_t = \gamma_t M_t + \delta_t S_t$$

### 3.3.3 Conclusion

$\forall \tau \in [t, T]$

$\begin{aligned} C_\tau &= E^Q [\exp[-r(T-\tau)] C_T / F_\tau] \\ S_\tau &= E^Q [\exp[-r(T-\tau)] S_T / F_\tau] \\ M_\tau &= E^Q [\exp[-r(T-\tau)] M_T / F_\tau] \end{aligned}$
---

On s'applique dans les deux paragraphes suivants à relever les analogies avec le théorème de valorisation sous le modèle à une période et commenter les différences.

## 3.4 Analogies avec le modèle discret à une période

- Dans les deux cadres, la construction du portefeuille répliquant mène à la mise en relief d'une probabilité risque neutre sous laquelle les prix de l'actif sans risque, l'actif risqué et l'actif C une fois discountés sont des martingales.
- Dans les deux cadres, la probabilité risque neutre est équivalente à la probabilité historique.

## 3.5 Différences

- Les opportunités d'arbitrage sont définies ici à partir de portefeuille ne contenant que les actifs de base, restriction que nous n'avons pas en temps discret. La conséquence est importante: dans le cadre discret le théorème d'évaluation parle du "prix" de l'actif dérivé alors qu'en temps continu on parle de "prix d'arbitrage"

- La stratégie de couverture n'est plus statique mais dynamique : le portefeuille répliquant est construit lors de la vente ou de l'achat au temps  $t$  de l'actif  $C$  mais il subira au cours du temps des réarrangements. Il est très important de noter que la stratégie mise en place est autofinancante. Ceci signifie que les réarrangements de portefeuille au cours du temps se font à coût nul.
- Nous n'avons pas montré l'équivalence (2). Nous avons simplement montré que l'AOA implique que il existe une mesure  $Q$  équivalente à  $P$  sous laquelle le prix des actifs de base et le prix d'arbitrage de certains (du fait de la condition d'intégrabilité sur  $h(S_T)$ ) actifs dérivés, une fois discountés, sont martingales. Démontrer la réciproque nécessite quelques restrictions. On peut la démontrer si, par exemple, on accepte de redéfinir les opportunités d'arbitrage en se restreignant aux portefeuilles autofinancants  $(\alpha_\tau, \beta_\tau)_\tau$  dont la valeur est bornée inférieurement.

### 3.6 Formules Black et Sholes

Identification des coefficients du portefeuille répliquant, EDP, calcul du prix BS et du delta: TD cours 3

#### 3.6.1 TD calcul du delta BS

On a

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C}{\partial S_t} \\
&= \frac{\partial \left[ E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} * (S_T - K)^+ / F_t \right] \right]}{\partial S_t} \\
&= \frac{\partial \left[ E^Q \left[ \left( S_t \exp \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma (W_T^Q - W_t^Q) - K \right)^+ / F_t \right] \right]}{\exp^{-r(T-t)} \partial S_t}
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left[ E^Q \left[ \left( S_t \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma (W_T^Q - W_t^Q) \right] - K \right)^+ / F_t \right] \right]}{\partial S_t} \\
&= \frac{\partial}{\partial S_t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( S_t \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma x \sqrt{T-t} \right] - K \right)^+ g(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial S_t} \left[ \left( S_t \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma x \sqrt{T-t} \right] - K \right)^+ \right] g(x) dx
\end{aligned}$$

avec  $g(x)$  la densité de la loi normale.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C}{\partial S_t} \exp^{r(T-t)} \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial S_t} \left[ \left( S_t \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma x \sqrt{T-t} \right] - K \right)^+ \right] g(x) dx \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma x \sqrt{T-t} \right] 1_{\{S_t \exp[(r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) + \sigma x \sqrt{T-t}] > K\}} g(x) dx \\
= & \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right] \int_{\frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} \exp \left[ \sigma x \sqrt{T-t} \right] * g(x) dx \\
= & \exp [r(T-t)] \int_{\frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} \exp \left[ \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma x \sqrt{T-t} \right] * g(x) dx \\
= & \exp [r(T-t)] \int_{\frac{\ln(K/S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} g(x) dx
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial S_t} &= \int_{\frac{\ln(K/S_t) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} g(x) dx \\
&= 1 - N(-d_1) \\
&= N(d_1)
\end{aligned}$$

### 3.6.2 Prix du call

Le prix du call est donné par:

$$\boxed{C_{BS}(t, T, r, S_t, K, \sigma) = S_t N(d_1) - \exp^{-r(T-t)} K N(d_2)}$$

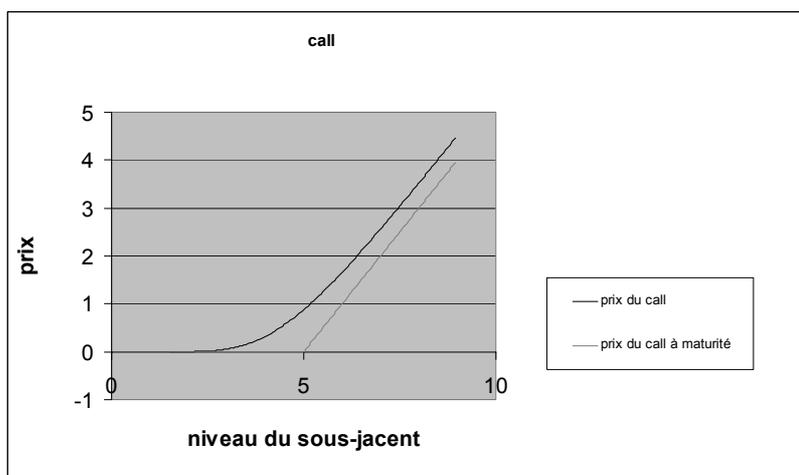
avec

- $d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t} = \frac{\ln(S_t/K) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$
- $t$  est la date de valorisation de l'option

Figure 15: valeurs numériques utilisées dans les figures 16,17, 18 et 19

strike	5
discount	0,9
vol	10%
maturité (T-t)	10

Figure 16: prix d'un call



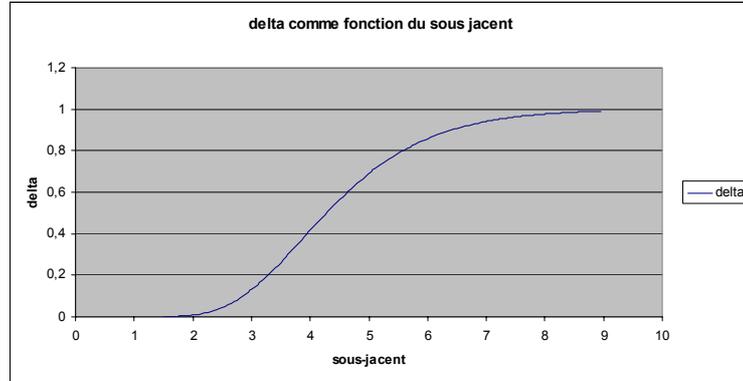
- $T$  est la date d'exercice de l'option
- $(T - t)$  est la maturité résiduelle de l'option
- $K$  est le strike de l'option
- $S_t$  est la valeur de l'action en  $t$
- $\sigma$  est la volatilité du sous-jacent

Introduisons les notions suivantes

- $\frac{\partial C}{\partial S_t}$  est appelé delta de l'option. Cette valeur comme nous le verrons dans le paragraphe suivant sert au trader à monter son portefeuille de couverture. Dans le cas d'un call, on a:

$$\frac{\partial C}{\partial S_t} = N(d_1)$$

Figure 17: delta d'un call



- $\frac{\partial C}{\partial t}$  est appelé théta de l'option
- $\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}$  est appelé gamma de l'option

Une illustration de ces formules est donnée par les figures 16 et 17.

### 3.6.3 Prix du put

Le prix du put est donné par

$$P_{BS}(t, T, r, S_t, K, \sigma) = \exp^{-r(T-t)} KN(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

et son delta par

$$\frac{\partial P}{\partial S_t} = -N(-d_1)$$

Une illustration de ces formules est donnée par les figures 18 et 19.

### 3.6.4 Prix forward d'un actif

On supposera dans cette section que le taux repo est égal au taux sans risque. On se place dans la situation d'une banque s'engageant à  $t$  à vendre en  $T$  un actif  $S$  au prix  $P^f$ . On a vu que dans la première partie du cours que pour déterminer  $P^f$  la banque doit monter une stratégie à base d'actif sans risque et d'actif risqué qui lui délivre les flux futurs tels que représenter figure 20.

Pour cela, la banque achète en  $t$  l'actif  $S$  au prix  $S_t$  et finance cet achat par un emprunt d'un montant  $S_t$  sur la durée  $(T-t)$ . L'opération est donc neutre en  $t$ , la banque se portant acquéreur de l'actif en empruntant. En  $T$  elle aura dans son portefeuille l'actif  $S$  et devra rembourser  $S_t * \exp^{r(T-t)}$  (emprunt au

Figure 18: prix d'un put

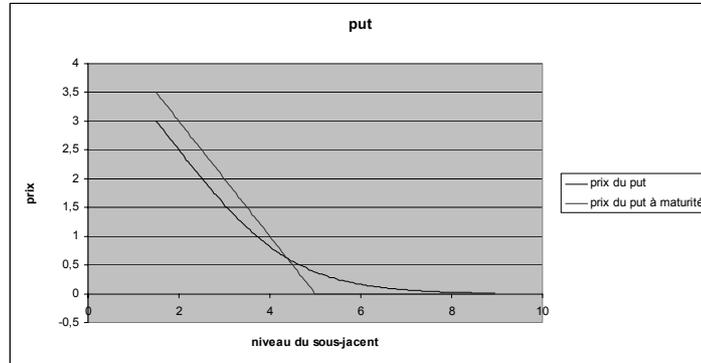


Figure 19: delta d'un put

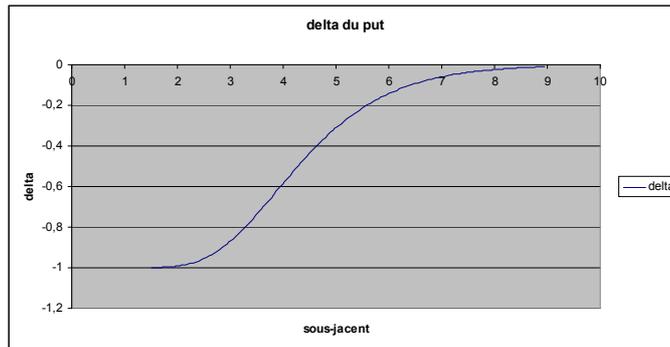
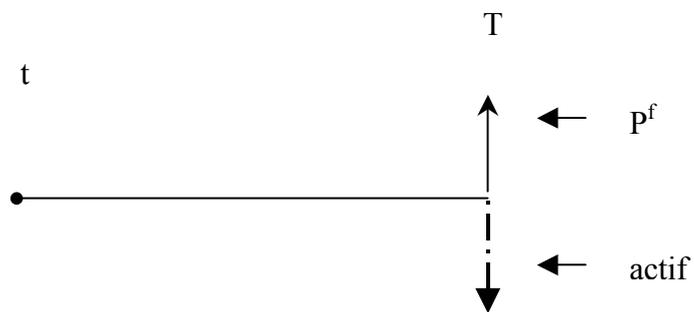


Figure 20: Vente forward par la banque de l'actif risqué S - point de vue de la banque



taux sans risque  $r$ ). En  $T$  elle aura donc dans son portefeuille l'actif que pourra céder à son client en contrepartie de  $P^f$  qui, somme qui permettra à la banque de rembourser son emprunt. D'où  $P^f = S_t * \exp^{r(T-t)}$ . Le raisonnement est en tout point équivalent au raisonnement tenu dans la première partie du cours. à une différence près toutefois: le 'repurchase agreement' est remplacé ici par un simple achat financé par l'actif sans risque. Dans la réalité des marchés, il faudrait prendre en compte ce décalage de taux de financement/emprunt.

Une autre façon de valoriser la valeur forward de l'actif est d'utiliser la formule de valorisation démontrée précédemment et de dire que la banque n'accepte de passer avec son client un contrat forward que si et seulement si le prix vu en  $t$  de ces flux futurs est 0. Soit si et seulement si

$$E^Q [\exp[-r(T-t)] P^f / F_t] = E^Q [\exp[-r(T-t)] S_T / F_t]$$

ou encore

$$P^f = S_t * \exp^{r(T-t)}$$

### 3.6.5 Prix BS du call et du put comme fonction du prix forward de l'actif.

Les formules de valorisation peuvent aussi s'exprimer en fonction du prix forward de l'actif. On a dans le cas du call:

$$C(t, T, r, S_t^T, K, \sigma) = \exp^{-r(T-t)} [S_t^T N(d_1) - KN(d_2)] \quad (13)$$

avec

- $d_1 = \frac{\ln(S_t^T / K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = \frac{\ln(S_t^T / K) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $S_t^T = S_t \exp^{r(T-t)}$  : prix forward de l'actif

### 3.6.6 Volatilité BS implicite et smile

Pour une date de maturité  $T$  donnée sont cotés sur le marché un certain nombre de calls et de puts pour différents niveaux de strike. Or les cotations ne sont pas données en prix mais en terme de volatilité BS, dite "volatilité implicite".

Si l'on note  $f_{BS}^K(\sigma)$  la fonction telle que:

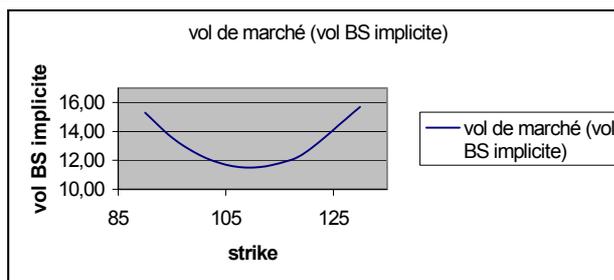
$$f_{BS}^K(\sigma) = C_{BS}(t, T, r, S, K, \sigma)$$

alors la volatilité implicite d'un call de strike  $K$  et de prix  $P_K$  est la valeur de  $\sigma^{BS \text{ implicite}}$  telle  $f_{BS}^K(\sigma) = P_K$ . On a donc

$$\sigma^{BS \text{ implicite}} = f_{BS}^K{}^{-1}(P_K)$$

Figure 21: Smile

spot	110								
T-t	2								
discount	0,9								
vol	strike	90	95	100	105	<b>110</b>	115	120	130
	vol de marché (vol BS implicite)	15,30	13,60	12,40	11,70	<b>11,50</b>	11,80	12,60	15,7
	prix du marché	29,72	25,33	21,09	17,14	13,64	10,81	8,78	6,92
	prix BS calculé avec la vol ATM	29,18	24,91	20,84	17,06	13,64	10,65	8,11	4,38



Or sur de nombreux marchés on s'aperçoit la volatilité implicite dépend de  $K$ . Ce phénomène est appelé "smile" du fait de la forme de la fonction  $\sigma^{BS\text{ implicite}}(K)$ . Nous en donnons un exemple numérique sur la figure 21. Un tel phénomène vient contredire l'hypothèse de diffusion que nous avons donnée à savoir que sous la probabilité historique on a :

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = \mu d\tau + \sigma dW^P$$

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r d\tau$$

avec des coefficients  $\mu$ ,  $r$  et  $\sigma$  non stochastiques. Le marché continue d'adhérer à la formalisation BS, sait qu'elle est fautive et apporte des corrections qui se traduisent par l'apparition de smile.

Ce phénomène est très présent sur le marché des actions, sur le marché des changes mais aussi sur le marché des taux d'intérêt.

### 3.7 Valorisation d'autres options exotiques (les calculs qui suivent font en partie l'objet de TD)

#### 3.7.1 Digitale sur le sous-jacent $S$ — 1ère méthode

Le payoff d'une digitale maturant en  $T$  et de strike  $K$  est donné par:

$$1_{\{S_T > K\}}$$

On note  $D_\tau$  le prix de cette digitale au temps  $\tau$ . En application du théorème de valorisation on a

$$D_t = E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} * 1_{\{S_T > K\}} / F_t \right]$$

soit

$$D_t = \exp^{-r(T-t)} \text{Pr oba}^Q [S_T > K/F_t]$$

or

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = r d\tau + \sigma dW^Q$$

et donc

$$S_T = S_t \exp \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \left( W_T^Q - W_t^Q \right)$$

avec  $W_T^Q - W_t^Q \rightsquigarrow \mathfrak{N}(0, T-t)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Pr oba}^Q [S_T > K/F_t] &= \text{Pr oba}^Q \left[ S_t \exp \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \left( W_T^Q - W_t^Q \right) > K/F_t \right] \\ &= \text{Pr oba}^Q \left[ \frac{W_T^Q - W_t^Q}{\sqrt{T-t}} > \frac{\ln \left( \frac{K}{S_t} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} / F_t \right] \\ &= 1 - N \left( \frac{\ln \left( \frac{K}{S_t} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\ &= 1 - N \left( - \frac{\ln \left( \frac{S}{K} \right) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\ &= N(d) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{array}{l} D_t = \exp^{-r(T-t)} N(d) \\ \text{avec} \\ d = \frac{\ln \left( \frac{S}{K} \right) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \end{array}$$

### 3.7.2 Digitale sur le sous jacent S — 2ème méthode

Il est possible de valoriser la digitale en remarquant que

$$1_{\{S_T > K\}} = - \frac{\partial (S_T - K)^+}{\partial K}$$

ou la dérivée est ici à prendre au sens des distributions. On a alors

$$\begin{aligned} D_t &= E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} * 1_{\{S_T > K\}} / F_t \right] \\ &= - \exp^{-r(T-t)} E^Q \left[ \frac{\partial (S_T - K)^+}{\partial K} / F_t \right] \end{aligned}$$

Or

$$E^Q \left[ \frac{\partial (S_T - K)^+}{\partial K} / F_t \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (S - K)^+}{\partial K} g(S) dS$$

où  $g$  est la densité de  $S$  en  $T$  sachant  $F_t$ .  $g$  ne dépendant pas de  $K$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} E^Q \left[ \frac{\partial (S_T - K)^+}{\partial K} / F_t \right] &= \frac{\partial}{\partial K} \int_{-\infty}^{+\infty} (S - K)^+ g(S) dS \\ &= \frac{\partial}{\partial K} E^Q \left[ (S - K)^+ / F_t \right] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} D_t &= -\frac{\partial}{\partial K} \left[ E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} * (S_T - K)^+ / F_t \right] \right] \\ &= -\frac{\partial C_t}{\partial K} \end{aligned}$$

où  $C_t$  est le prix d'un call maturant en  $T$  et de strike  $K$ . Ainsi dans le cadre d'une valorisation par formule BS:

$$\boxed{D_t = -\frac{\partial C_t}{\partial K} = \exp^{-r(T-t)} N(d_2)}$$

### 3.7.3 Digitale sur le sous jacent $S$ — 3ème méthode: portefeuille répliquant et valorisation en présence de smile

En fait la seconde approche n'est pas à considérer que d'un point purement calculatoire. En effet elle aussi la traduction mathématique de la stratégie de hedge statique que le trader va mettre en place pour couvrir l'achat/la vente d'une digitale. Pour le comprendre construisons un portefeuille constitué par l'achat d'un call de strike  $K - \frac{\varepsilon}{2}$  et la vente d'un call de strike  $K + \frac{\varepsilon}{2}$ . Le payoff à maturité de ce portefeuille est représenté par la figure 22. En prenant  $\frac{1}{\varepsilon}$  pour notionnel de ce portefeuille répliquant on obtient un payoff proche de la digitale. Ceci est représenté par la figure 23. Le prix du portefeuille répliquant est

$$V_t(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ C_t \left( S_t, K - \frac{\varepsilon}{2} \right) - C_t \left( S_t, K + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]$$

Or ce portefeuille répliquant n'est véritablement répliquant que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. On a donc

$$D_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} V_t(\varepsilon) = -\frac{\partial C_t}{\partial K}$$

soit le résultat obtenu précédemment.

En présence de smile, il ne faut pas oublier que la volatilité dépend aussi du smile. On a alors

$$D_t = - \left[ \frac{\partial C_t}{\partial K} + \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma^{BS \text{ implicite}}}{\partial K} \right]$$

Le phénomène est illustrée par la figure 24.

Figure 22: Call Spread

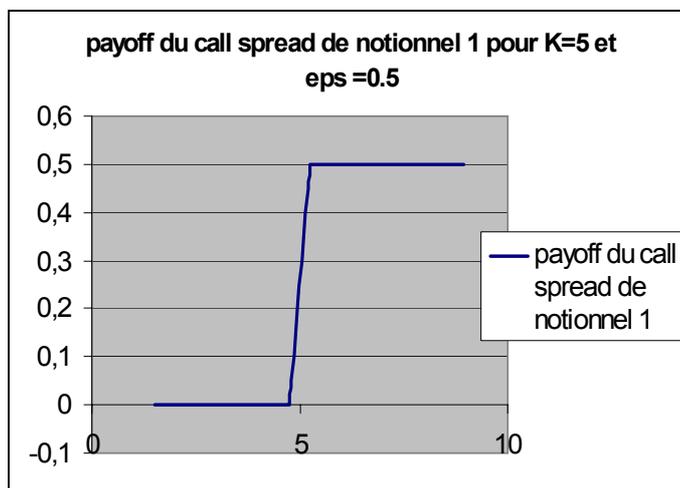


Figure 23: Call Spread et Digitale

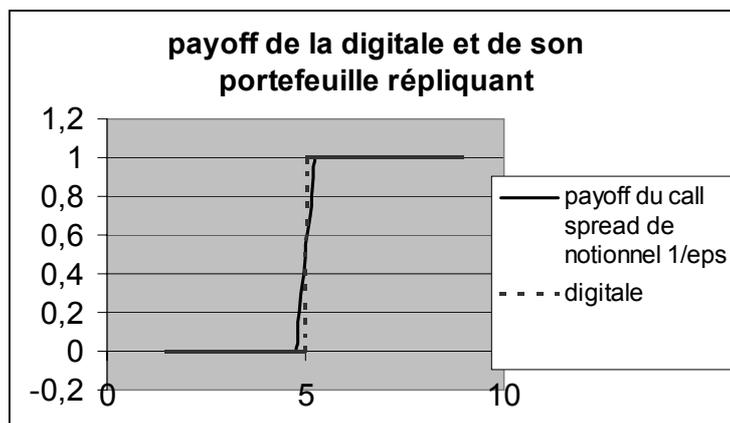
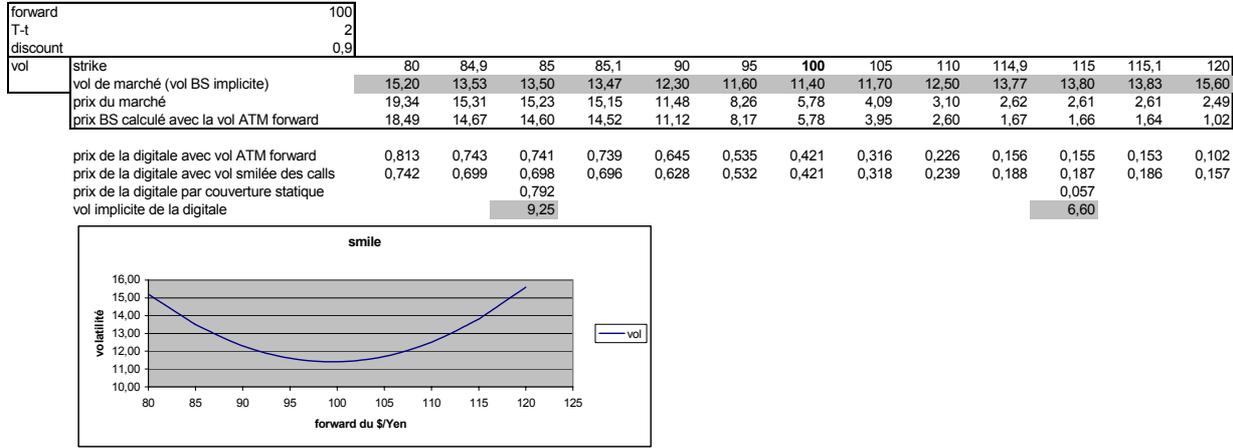


Figure 24: illustration de l'impact du smile sur le prix d'une digitale



### 3.7.4 Option barrière

Nous nous intéresserons ici à la valorisation d'un "Down and In Call" ou "DIC" mûrissant en  $T$  de strike  $K$  et de niveau de barrière  $H$ . Un DIC est un call qui ne s'active que si entre la date de valorisation et la date de maturité le sous-jacent est passé sous le niveau de la barrière. Le payoff d'un DIC peut s'écrire:

$$(S_T - K)^+ 1_{\left\{ \inf_{\tau \in [t, T]} S_\tau < H \right\}}$$

Nous traiterons ici le cas où  $K < H$ . Notons  $Dic_\tau$  la valeur au temps  $\tau \in [t, T]$  du DIC.

Le théorème de valorisation<sup>2</sup> nous permet de dire que :

$$Dic_t = E^Q \left( \exp^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ 1_{\left\{ \inf_{\tau \in [t, T]} S_\tau < H \right\}} / F_t \right)$$

avec sous  $Q$

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = r d\tau + \sigma dW^Q$$

<sup>2</sup>Le théorème de valorisation ne mentionnait que les payoffs du type  $h(S_T)$ . Le théorème s'applique aussi aux payoffs  $Z$ , où  $Z$  est une variable positive  $F_T$ -mesurable et telle que  $E^Q(Z/F_t)$  existe.  $F_T$  est ici la filtration engendrée par le prix de l'actif sous-jacent  $S$ , soit, dans notre contexte où  $\mu$ ,  $r$  et  $\sigma$  sont non stochastiques, la filtration engendrée par le brownien  $W^Q$

Figure 25: chemin et chemin réfléchi

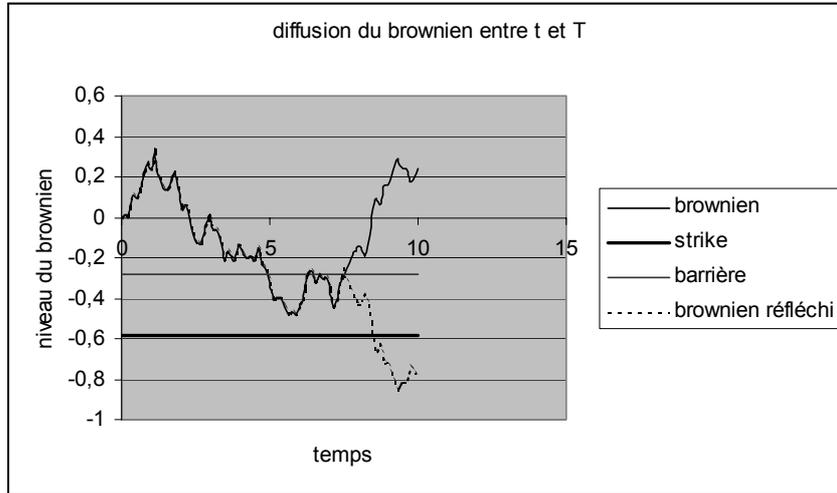


Figure 26:

Pour alléger les notations définissons l'ensemble A de la façon suivante:

$$A(S, H) \stackrel{def}{=} \left\{ \inf_{\tau \in [t, T]} S_\tau < H \right\}$$

**Résultats préliminaires** Soit  $B_\tau$  un brownien sur  $[t, T]$  issu de 0 en t. Soit deux constantes k et h telles que  $k < h$ .

Alors pour  $b \in [k, h]$  on a

$$\Pr ob \left( \inf_{[t, T]} B_\tau < h / B_T = b \right) = 1$$

En effet si en T on a  $B_T < h$  alors on sait que la barrière h a été franchie.

Par ailleurs, le principe de réflexion nous donne pour  $b \in [h, +\infty]$  :

$$\Pr ob \left( \inf_{[t, T]} B_\tau < h / B_T = b \right) = \frac{g(2h - b)}{g(b)} \quad (14)$$

avec  $g(\cdot)$  la densité d'un brownien en T issu de 0 en t.

Pour une illustration du calcul du principe de réflexion utilisé en (14), se référer à la figure 26.

**Première piste** On part de :

$$\begin{aligned}
Dic_t &= \exp^{-r(T-t)} E^Q \left( (S_T - K)^+ 1_{A(S,H)} / F_t \right) \\
&= \exp^{-r(T-t)} E^Q \left( (S_T - K) 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S,H)} / F_t \right) \\
&= \exp^{-r(T-t)} \left[ \begin{array}{l} E^Q (S_T 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S,H)} / F_t) \\ - E^Q (K 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S,H)} / F_t) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Exprimons  $S_T$ ,  $1_{\{S_T > K\}}$  et  $1_{A(S,H)}$  en fonction de  $W^Q$

$$\begin{aligned}
S_T &= S_t \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma (W_T^Q - W_t^Q) \right] \\
\{S_T > K\} &= \left\{ S_t \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma (W_T^Q - W_t^Q) \right] > K \right\} \\
&= W_T^Q - W_t^Q > \frac{\ln \left( \frac{K}{S_t} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma}
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\{S_T > K\} = \{W_T^Q - W_t^Q > K^Q\}$$

avec

$$K^Q = \frac{\ln \left( \frac{K}{S_t} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma}$$

de même

$$\begin{aligned}
A(S, H) &= \left\{ \inf_{\tau \in [t, T]} S_\tau < H \right\} \\
&= \left\{ \inf_{\tau \in [t, T]} \left( W_\tau^Q - W_t^Q - H^Q(\tau) \right) < 0 \right\}
\end{aligned}$$

avec

$$H^Q(\tau) = \frac{\ln \left( \frac{H}{S_t} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-\tau)}{\sigma}$$

On remarque alors que si  $H^Q(\tau)$  et  $K^Q$  sont parfaitement connu au temps  $t$ ,  $H^Q(\tau)$  a l'inconvénient de dépendre de  $\tau$ . Cette piste de calcul n'est pas la bonne car nous ne pourrions pas utiliser nos résultats de la section précédente.

**Changement de probabilité** Le calcul de  $E^Q (S_T 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S,H)} / F_t)$  et de  $E^Q (K * 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S,H)} / F_t)$  serait en fait bien plus aisé si l'on se plaçait sous une proba  $L$  telle que:

$$S_\tau = S_t \exp \sigma W_\tau^L$$

En effet, dans ce cas on a :

$$\{S_T > K\} = \{W_T^L - W_t^L > K^L\}$$

avec  $K^L = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}{\sigma}$  et :

$$A(S, H) = \inf_{\tau \in [t, T]} \{W_\tau^L - W_t^L < H^L\}$$

avec  $H^L = \frac{\ln\left(\frac{H}{S_t}\right)}{\sigma}$ .

Soit donc la mesure L telle que :

$$\frac{dL}{dQ} = \exp\left(-\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} W_T^Q - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)^2 T\right)$$

En appliquant le théorème de Girsanov on a :

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 d\tau + \sigma dW^L$$

et

$$\frac{dQ}{dL} = \exp\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} W_T^L - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)^2 T\right)$$

avec

$$W_t^L = W_t^Q + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} t$$

Pour la suite on notera  $m = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$

**calcul de  $E^Q (K * 1_{\{S_T > K\}} 1_{\{T_H < T\}} / F_t)$**

$$\begin{aligned} & E^Q (K 1_{\{S_T < T\}} 1_{A(S, H)} / F_t) \\ &= \\ & \frac{E^L \left( \frac{dQ}{dL} K * 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S, H)} / F_t \right)}{E^L \left( \frac{dQ}{dL} / F_t \right)} \\ &= \\ & E^L \left( \frac{\frac{dQ}{dL}}{E^L \left( \frac{dQ}{dL} / F_t \right)} K * 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S, H)} / F_t \right) \\ &= \\ & K E^L \left( \frac{\exp(mW_T^L - \frac{1}{2}m^2T)}{E^L (\exp(mW_T^L - \frac{1}{2}m^2T) / F_t)} * 1_{\{W_T^L - W_t^L > K^L\}} 1_{A(S, H)} / F_t \right) \end{aligned}$$

Or

$$E^L \left( \exp(mW_T^L - \frac{1}{2}m^2T)/F_t \right) = \exp(mW_t^L - \frac{1}{2}m^2t)$$

et donc

$$\begin{aligned} & E^Q (K 1_{\{S_T < T\}} 1_{A(S,H)}/F_t) \\ &= \\ & K E^L \left( \exp(m(W_T^L - W_t^L) - \frac{1}{2}m^2(T-t)) * 1_{\{W_T^L - W_t^L > K^L\}} 1_{A(S,H)}/F_t \right) \\ &= \\ & K \exp(-\frac{1}{2}m^2(T-t)) E^L \left( \begin{array}{c} \exp(m(W_T^L - W_t^L)) \\ 1_{\{W_T^L - W_t^L > K^L\}} 1_{A(S,H)}/F_t \end{array} \right) \end{aligned}$$

avec la dernière étape du calcul consiste à évaluer

$$\begin{aligned} & E^L \left( \exp(m(W_T^L - W_t^L)) * 1_{\{W_T^L - W_t^L > K^L\}} 1_{A(S,H)}/F_t \right) \\ &= \\ & E^L \left( \exp(m(W_T^L - W_t^L)) * 1_{\{W_T^L - W_t^L > K^L\}} 1_{A(S,H)}/F_t \right) \\ &= E^L \left( \exp(mB_T) * 1_{\{B_T > K^L\}} 1_{\left\{ \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L \right\}} \right) \\ &= E^L \left[ E^L \left( \exp(mB_T) * 1_{\{B_T > K^L\}} 1_{\left\{ \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L \right\}} / B_T \right) \right] \\ &= E^L \left[ \exp(mB_T) * 1_{\{B_T > K^L\}} E^L \left( 1_{\left\{ \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L \right\}} / B_T \right) \right] \\ &= E^L \left[ \exp(mB_T) * 1_{\{B_T > K^L\}} \Pr ob^L \left( \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L / B_T \right) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & E^L \left( \exp(mB_T) * 1_{\{B_T > K^L\}} 1_{\left\{ \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L \right\}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(mb) * 1_{\{B_T > K^L\}} \Pr ob^L \left( \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L / B_T = b \right) g(b) db \\ &= \int_{K^L}^{H^L} \exp(mb) \Pr ob^L \left( \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L / B_T = b \right) g(b) db \\ &+ \int_{H^L}^{+\infty} \exp(mb) \Pr ob^L \left( \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L / B_T = b \right) g(b) db \end{aligned}$$

avec  $g(\cdot)$  la densité d'un brownien en T issu de 0 en t.

Ainsi et en appliquant nos résultats préliminaires:

$$\begin{aligned}
& \int_{K^L}^{H^L} \exp(mb) \Pr ob^L \left( \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L/B_T = b \right) g(b) db \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{K^L}^{H^L} \exp(mb) \exp\left(-\frac{b^2}{2(T-t)}\right) db \\
&= \frac{\exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{K^L}^{H^L} \exp\left(-\frac{(b-m(T-t))^2}{2(T-t)}\right) db \\
&= \frac{\exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{K^L-m(T-t)}^{H^L-m(T-t)} \exp\left(-\frac{y^2}{2(T-t)}\right) dy \\
&= \exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2}\right) \left[ N\left(\frac{H^L-m(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{K^L-m(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \right]
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
& \int_{H^L}^{+\infty} \exp(mb) \Pr ob^L \left( \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L/B_T = b \right) g(b) db \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{H^L}^{+\infty} \exp(mb) \exp\left(-\frac{(2H^L-b)^2}{2(T-t)}\right) db \\
&= \frac{\exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2} + 2H^L m\right)}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{H^L}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(b-[2H^L+m(T-t)])^2}{2(T-t)}\right) db \\
&= \frac{\exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2} + 2H^L m\right)}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{H^L-2H^L-m(T-t)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2(T-t)}\right) dy
\end{aligned}$$

soit en introduisant la cumulée de la loi normale :

$$\begin{aligned}
& \int_{H^L}^{+\infty} \exp(mb) \Pr ob^L \left( B_T \in [b+db], \inf_{[t,T]} B_\tau < H^L \right) \\
&= \exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2} + 2H^L m\right) \left( 1 - N\left(-\frac{m(T-t) + H^L}{\sqrt{T-t}}\right) \right) \\
&= \exp\left(\frac{m^2(T-t)}{2} + 2H^L m\right) N\left(\frac{m(T-t) + H^L}{\sqrt{T-t}}\right)
\end{aligned}$$

conclusion

$$\begin{aligned}
& E^Q (K * 1_{\{S_T > K\}} 1_{A(S,H)} / F_t) \\
&= \\
& K \exp \left( -\frac{1}{2} m^2 (T - t) \right) \left[ \begin{aligned} & \exp \left( \frac{m^2 (T-t)}{2} \right) \left[ N \left( \frac{H^L - m(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) - N \left( \frac{K^L - m(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right] + \\ & \exp \left( \frac{m^2 (T-t)}{2} + 2H^L m \right) N \left( \frac{m(T-t) + H^L}{\sqrt{T-t}} \right) \end{aligned} \right] \\
&= \\
& K \left[ \begin{aligned} & N \left( \frac{H^L - m(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) - N \left( \frac{K^L - m(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) + \\ & \exp (2H^L m) N \left( \frac{m(T-t) + H^L}{\sqrt{T-t}} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

**calcul de  $E^Q (S_T * 1_{\{S_T > K\}} 1_{\{T_H < T\}} / F_t)$**  Le calcul est similaire : il faut effectuer le calcul sous la probabilité L.

## 4 Construction de la stratégie: approche du trading

Lorsque qu'une salle des marchés achète ou vend un actif dérivé, elle met immédiatement en place une stratégie de couverture. Son objectif n'est pas de parier sur le flux qu'elle aura à payer ou à recevoir en T. Au contraire elle investit la totalité de la prime reçue (dans le cas où elle vend l'actif dérivé) ou respectivement elle finance son achat (dans le cas où elle achète l'actif) dans un portefeuille qui à maturité lui délivrera des flux équivalents à ceux qu'elle recevra/versera dans le cadre de son actif dérivé. Le trader construit donc un portefeuille global de valeur nulle qui inclut l'actif dérivé et sa couverture, exact inverse du portefeuille répliquant l'actif dérivé, et maintient ce portefeuille global de façon qu'en T sa valeur soit nulle également. L'objectif du trader est en fait plus fort : il est de maintenir la valeur de son portefeuille à 0 pour tout  $\tau \in [t, T]$  car son portefeuille de couverture doit être dynamiquement parfait. Nous allons voir qu'un tel objectif n'est atteint que lorsque le prix de l'option vérifie BS.

On note  $\Pi_\tau$  la valeur du portefeuille en  $\tau$  et l'on se place ici dans le cas d'un trader ayant acheté l'actif dérivé.

En  $\tau$  on a:

$$\boxed{\Pi_\tau = C_\tau + \alpha_\tau M_\tau + \beta_\tau S_\tau = 0} \quad (15)$$

Entre  $\tau$  et  $\tau + \Delta\tau$ , le tradeur laisse dériver son portefeuille. Il le recomposera à coût nul (stratégie autofinçante) en  $\tau + \Delta\tau$  puis le laissera dériver entre  $\tau + \Delta\tau$  et  $\tau + 2\Delta\tau$  etc...

Développons

$$\Delta\Pi_\tau = \Pi_{\tau+\Delta\tau} - \Pi_\tau$$

en utilisant par Ito et l'équation autofinçante (6).

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_\tau &= \Delta(C_\tau + \alpha_\tau M_\tau + \beta_\tau S_\tau) \\ &= \Delta C_\tau + \alpha_\tau \Delta M_\tau + \beta_\tau \Delta S_\tau\end{aligned}$$

avec

- $\Delta M_\tau = r M_\tau \Delta\tau$
- $\Delta C_\tau = \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau$

soit

$$\Delta\Pi_\tau = \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau + \alpha_\tau r M_\tau \Delta\tau + \beta_\tau \Delta S_\tau \quad (16)$$

Par ailleurs (15) implique

$$\alpha_\tau M_\tau = -(C_\tau + \beta_\tau S_\tau)$$

et donc (16) devient

$$\Delta\Pi_\tau = \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau - r \Delta\tau (C + \beta_\tau S_\tau) + \beta_\tau \Delta S_\tau$$

Pour se débarrasser du risque que l'évolution de S fait courir à son portefeuille, le trader a neutralisé les termes devant  $\Delta S_\tau$  et donc, au temps  $\tau$ , il a choisi  $\beta_\tau = -\frac{\partial C}{\partial S}$ . En conséquence

$$\boxed{\Delta\Pi_\tau = \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau + r \left( \frac{\partial C}{\partial S} S_\tau - C_\tau \right) \Delta\tau} \quad (17)$$

Or l'edp BS est :

$$0 = \frac{\partial C}{\partial \tau} + r \left( \frac{\partial C}{\partial S} S_\tau - C_\tau \right) + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

d'où si l'edp BS est vérifié par le prix on a bien :

$$\boxed{\Delta\Pi_\tau = 0}$$

Interprétons l'équation (17) terme par terme :

- $\frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau$  est la dérive due au théta : toute chose égale par ailleurs, l'option perd (dans le cas d'un call par exemple) ou gagne de la valeur lorsque le temps passe c'est-à-dire lorsque la maturité résiduelle de l'option baisse. Ce phénomène est illustré par la figure 27

Figure 27: Valeur temps

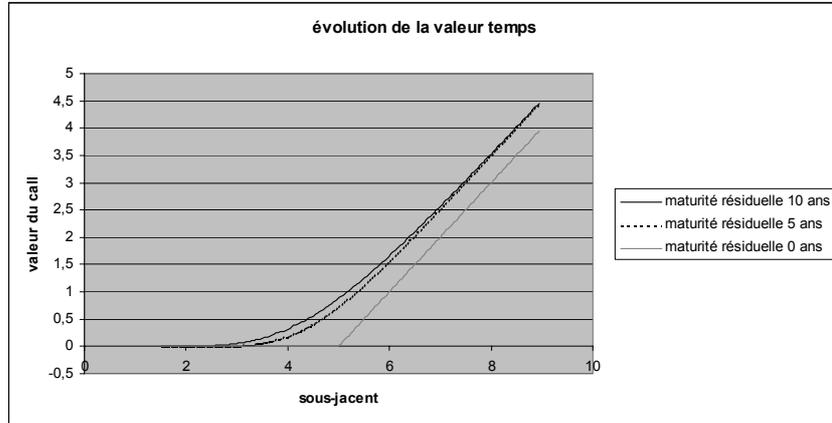
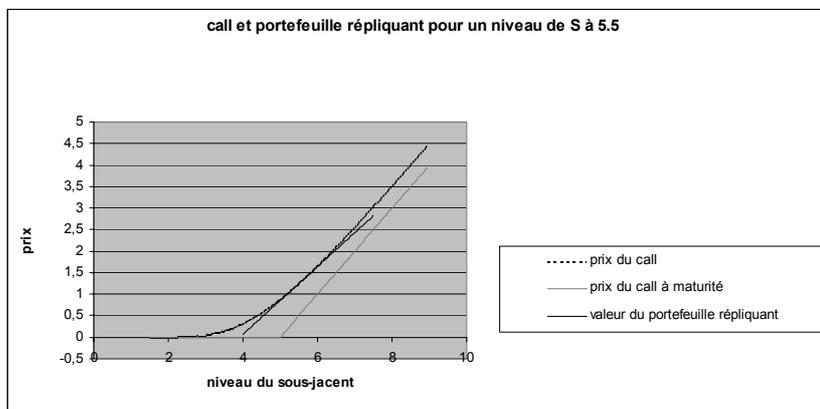


Figure 28: Achat d'un call et construction de sa couverture

strike	5		
discount	0,9		
vol	10%		
maturité (T-t)	10		
spot	prix du call	delta	(-1)*delta*spot
5,5	1,25	0,79	-4,32

- $r \left( \frac{\partial C}{\partial S} S_\tau - C_\tau \right) \Delta\tau$  est le coût/rendement du financement du call et des actions : prenons l'exemple où le trader a acheté un call sur actions. Pour se couvrir il vend  $\frac{\partial C}{\partial S}$  actions (on reviendra sur cette vente à découvert dans le prochain paragraphe). Les éléments chiffrés sont donnés dans la figure 28. La vente des actions rapporte 4,32 tandis que l'achat du call nécessite l'emprunt de 1,25. Au total la salle des marchés doit placer sur son compte rémunéré au taux sans risque  $4,32 - 1,25 \left( = \frac{\partial C}{\partial S} S_\tau - C_\tau \right)$  somme qui placée sur un temps  $\Delta\tau$  lui rapportera  $(4,32 - 1,25) * r * \Delta\tau$
- $\frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$  est le gain en "convexité" du portefeuille ou dérive due au gamma de l'option. Ce gain est à prendre au sens large : si  $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  est positif ce gain est positif, sinon celui-ci est négatif et ce gain est une perte.

Figure 29: Valeur du call et du portefeuille répliquant en fonction du niveau du sous-jacent



Nous illustrons ce gain en convexité par les figures 29 et 30. On voit sur la figure 30 que le portefeuille global n'est pas sensible au premier ordre au déplacement du sous-jacent (dérivé première nulle : on dit qu'il est "delta neutre"). Ce n'est pas une surprise car le portefeuille a été construit dans cette optique. En revanche il est sensible au second ordre et la variation de valeur du portefeuille sera toujours du même signe, que le choc sur  $S$  soit positif ou négatif. En pratique, le trader laisse son portefeuille "faire son gamma" puis se "réhédge" de façon à toujours rester "delta neutre".

#### 4.1 Vente à découvert

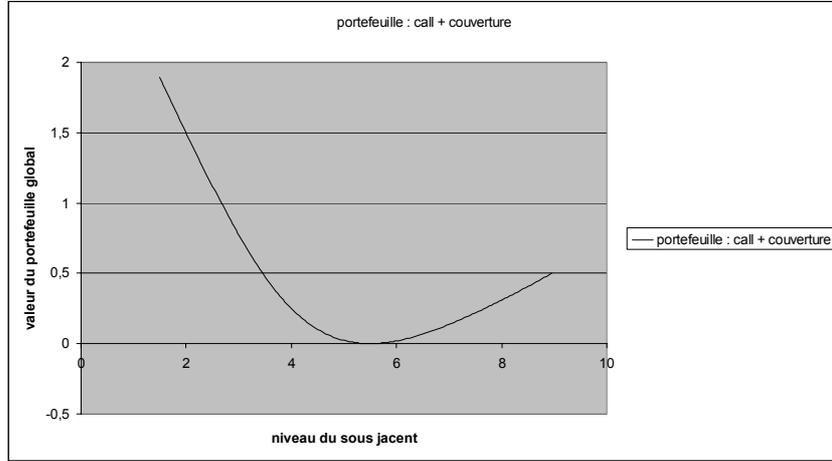
Revenons sur la vente à découvert que le trader a effectuée pour couvrir son achat du call. Pour vendre  $0,79 \left( = \frac{\partial C}{\partial S} = -\beta_\tau \right)$  action, le trader doit les emprunter et pour cela rentre dans une opération de repo qui lui permet de les emprunter entre  $\tau$  et  $\tau + \Delta\tau$ . Il combine cette opération repo avec la vente spot des actions : l'opération résultante est une vente à terme. Le tout est illustré par la figure 31.

Valorisons cette position en  $\tau$  puis en  $\tau + \Delta\tau$ . Pour simplifier on admettra que le taux court et le taux repo sont égaux soit

$$r = r_{repo}$$

On note  $\Pi_\tau^1$  la valeur en  $\tau$  de cette position et  $\Pi_{\tau+\Delta\tau}^1$  sa valeur en  $\tau + \Delta\tau$ . On a  $\Pi_\tau^1 = 0$  par définition de la vente à terme de l'action. En revanche en  $\tau + \Delta\tau$

Figure 30: Valeur du portefeuille global en fonction du niveau du sous jacent



cette position est valorisée par

$$\Pi_{\tau+\Delta\tau}^1 = \frac{\partial C}{\partial S} \left[ \begin{array}{l} S_{\tau} * (1 + r * \Delta\tau) \quad (\text{flux certain : prix à terme de l'action}) \\ - \\ S_{\tau+\Delta\tau} \end{array} \left( \begin{array}{l} \text{pour rendre l'action le trader} \\ \text{doit en acheter une au prix prévalent en } \tau + \Delta\tau \end{array} \right) \right]$$

Notons  $\Delta\Pi_{\tau}^1 = \Pi_{\tau+\Delta\tau}^1 - \Pi_{\tau}^1$

on a :

$$\Delta\Pi_{\tau}^1 = \frac{\partial C}{\partial S} [S_{\tau} * (1 + r * \Delta\tau) - S_{\tau+\Delta\tau}]$$

soit

$$\Delta\Pi_{\tau}^1 = \frac{\partial C}{\partial S} [S_{\tau} * r * \Delta\tau - \Delta S_{\tau}]$$

Reconsidérons maintenant le reste du portefeuille global que notre trader avait constitué : l'achat d'un call et le financement de cet achat. En  $\tau$  cette partie du portefeuille vaut 0 par construction:

$$\begin{aligned} \Pi_{\tau}^2 &= C_{\tau}(\text{le call}) - C_{\tau}(\text{endettement sur compte à taux sansrisque}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En  $\tau + \Delta\tau$  on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{\tau+dt}^2 &= C_{\tau+\Delta\tau}(\text{le call}) \\ &- \\ &C_{\tau}(1 + r * \Delta\tau)(\text{financement sur compte à taux sans risque}) \end{aligned}$$

Figure 31: vente à découvert

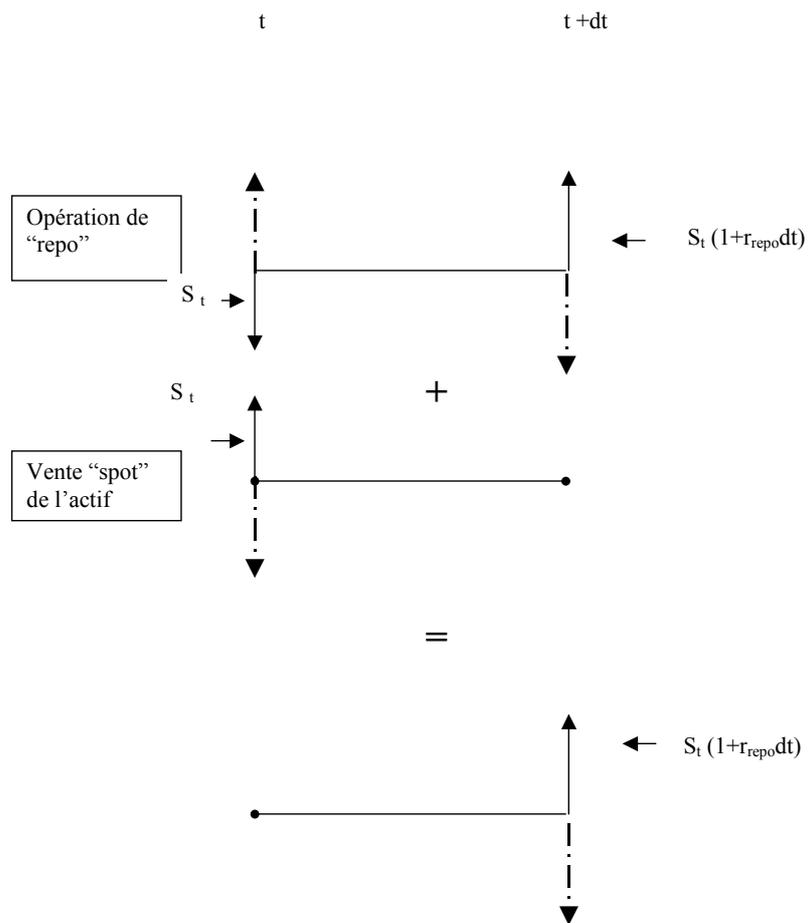


Figure 32: Données chiffrées pour un put

strike	5		
discount	0,9		
vol	10%		
maturité (T-t)	10		
spot	prix du put	delta	(-1)*delta*spot
5,5	1,25	-0,21	1,17

et donc

$$\Delta \Pi_{\tau}^2 = \Delta C_{\tau} - C_{\tau}(r * \Delta \tau)$$

On obtient alors sur la globalité du portefeuille et en appliquant Ito:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_{\tau} &= \Delta \Pi_{\tau}^1 + \Delta \Pi_{\tau}^2 \\ &= \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} + r \left( \frac{\partial C}{\partial S} S_{\tau} - C_{\tau} \right) + \frac{1}{2} (S_{\tau} \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] \Delta \tau \end{aligned}$$

et donc bien l'équation (17).

#### 4.2 TD : achat d'un put ;

montrer que sous AOA le prix d'un put est donné par

$$P_t = \exp^{-r(T-t)} K - S_t + C_t$$

par mise en place d'un portefeuille de couverture statique contenant l'actif sans risque, l'action et un call. Etude du portefeuille de couverture dynamique avec les paramètres chiffrés donnés dans la figure 32 :

#### 4.3 TP : vente d'un call et couverture en temps discret

Nous sommes en  $t$  et vendons à l'un de nos client un call maturant en  $T$ . Le trader gérant la position se hedgera  $n$  fois d'ici à la maturité : il rebalance son portefeuille tous les  $\Delta \tau = (T - t) / n$

En  $t$  le portefeuille est constitué de:

- -1 \* call -> valorisation :  $\Pi_t^1 = -C_t$
- sa couverture en actif risqué -> valorisation :  $\Pi_t^2 = \beta_t * S_t$  avec

$$\beta_t = \frac{\partial C}{\partial S}$$

On remarque que  $\beta_t > 0$  : pour couvrir une vente de call il faut acheter des actifs sous-jacent

- son financement -> valorisation :  $\Pi_t^3 = C_t - \frac{\partial C}{\partial S} * S_t$

On vérifie que l'on a effectivement lors de la constitution du portefeuille :

$$\Pi_t = \Pi_t^1 + \Pi_t^2 + \Pi_t^3 = 0 \quad (18)$$

Le trader laisse le portefeuille dériver entre  $t$  et  $t + \Delta\tau$ . On obtient par simple développement limité:

$$\begin{aligned} \Pi_{t+\Delta\tau}^1 &= -C_{t+\Delta\tau}(S_{t+\Delta\tau t}) \\ &= -\left[ C_t(S_t) + \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S_\tau)^2 \right] \end{aligned}$$

Or (équation de diffusion de S sous la probabilité historique, celle que vit le trader)

$$\Delta S_\tau = S_{t+\Delta\tau t} - S_t = S_t \mu \Delta\tau + S_t \sigma \Delta W$$

et donc

$$(\Delta S_\tau)^2 \simeq (S_t \sigma)^2 (\Delta W)^2 = (S_t \sigma)^2 \Delta\tau X_1$$

où  $X_1$  est un *chi*<sup>2</sup>

Ainsi

$$\Pi_{t+\Delta\tau}^1 \simeq \Pi_t^1 - \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 \Delta\tau X_1 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right]$$

$\Pi_{t+\Delta\tau}^2$  et  $\Pi_{t+\Delta\tau}^3$  se calculent aisément :

$$\Pi_{t+\Delta\tau}^2 = \Pi_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau$$

$$\Pi_{t+\Delta\tau}^3 \simeq \Pi_t^3 * (1 + r \Delta\tau)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \Pi_{t+\Delta\tau} &= \Pi_{t+\Delta\tau}^1 + \Pi_{t+\Delta\tau}^2 + \Pi_{t+\Delta\tau}^3 \\ &\simeq \Pi_t^1 + \Pi_t^2 + \Pi_t^3 - \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 \Delta\tau X_1 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] + \Pi_t^3 * r \Delta\tau \\ &= 0 - \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 \Delta\tau X_1 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] + \Pi_t^3 * r \Delta\tau \end{aligned}$$

et donc :

$$\Pi_{t+\Delta\tau} \simeq - \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 \Delta\tau X_1 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] + \Pi_t^3 * r \Delta\tau \quad (19)$$

or l'équation (18) nous permet d'écrire:

$$\Pi_t^3 = -\Pi_t^1 - \Pi_t^2 = C_t - \frac{\partial C}{\partial S} * S_t \quad (20)$$

D'où

$$\Pi_{t+\Delta\tau} \simeq - \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 X_1 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial S} * r S_t r - r C_t \right] \Delta\tau \quad (21)$$

Or le prix du call vérifie l'EDP BS et l'on a donc

$$0 = \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial S} * r S_t r - r C_t \quad (22)$$

(22)\* $\Delta\tau$  + (21) donne:

$$\Pi_{t+\Delta\tau} = \Pi_{t+\Delta\tau}^1 + \Pi_{t+\Delta\tau}^2 + \Pi_{t+\Delta\tau}^3 \simeq \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 (1 - X_1) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$$

En  $t + \Delta\tau$  le trader rebalance sa position de façon à rester "delta neutre". Le rebalancement du portefeuille n'implique aucune modification de sa valeur mais modifie sa composition:

- $\Pi_{t+\Delta\tau}^1 = -C_{t+\Delta\tau}$
- $\Pi_{t+\Delta\tau}^2 = \frac{\partial C}{\partial S} (S_{t+\Delta\tau}, t + \Delta\tau) * S_{t+\Delta\tau}$
- $\Pi_{t+\Delta\tau}^3 = \Pi_t^3 * (1 + r \Delta\tau) - \left[ \frac{\partial C}{\partial S} (t + \Delta\tau, S_{t+\Delta\tau}) - \frac{\partial C}{\partial S} (t, S_t) \right] * S_{t+\Delta\tau}$

(Par la suite on omettra  $(S_{t+\Delta\tau}, t + \Delta\tau)$  dans les expressions  $\frac{\partial C}{\partial S} (S_{t+\Delta\tau}, t + \Delta\tau)$ )  
La valeur du portefeuille est inchangé c'est à dire que l'on a encore:

$$\Pi_{t+\Delta\tau} = \Pi_{t+\Delta\tau}^1 + \Pi_{t+\Delta\tau}^2 + \Pi_{t+\Delta\tau}^3 \simeq \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 (1 - X_1) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$$

Le calcul de  $\Pi_{t+2\Delta\tau}$  s'effectue de façon similaire à deux équations près, du fait de la non nullité de  $\Pi_{t+\Delta\tau}$  : il faut remplacer (19) par:

$$\Pi_{t+2\Delta\tau} \simeq \Pi_{t+\Delta\tau} - \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_t \sigma)^2 \Delta\tau X_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] + \Pi_{t+\Delta\tau}^3 * r \Delta\tau$$

où  $X_2$  un  $\chi^2$  indépendant de  $X_1$ , et remplacer également l'équation (20) par

$$\Pi_{t+\Delta\tau}^3 = -\Pi_{t+\Delta\tau}^1 - \Pi_{t+\Delta\tau}^2 + \Pi_{t+\Delta\tau} = C_{t+\Delta\tau} - \frac{\partial C}{\partial S} * S_{t+\Delta\tau} + \Pi_{t+\Delta\tau}$$

On obtient alors

$$\Pi_{t+2\Delta\tau} \simeq (1 + r\Delta\tau) * \Pi_{t+\Delta\tau} + \frac{1}{2} (S_{t+\Delta\tau}\sigma)^2 (1 - X_2) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$$

Et de façon générale

$$\Pi_{t+i\Delta\tau} \simeq (1 + r\Delta\tau) * \Pi_{t+(i-1)\Delta\tau} + \frac{1}{2} (S_{t+(i-1)\Delta\tau}\sigma)^2 (1 - X_i) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$$

soit encore

$$\Delta\Pi_{t+(i-1)\Delta\tau} \simeq r\Pi_{t+(i-1)\Delta\tau}\Delta\tau + \frac{1}{2} (S_{t+(i-1)\Delta\tau}\sigma)^2 (1 - X_i) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$$

Si l'on pose  $Y_\tau = \Pi_\tau * \exp(-r * (T - \tau))$

On obtient

$$\Delta Y_{t+(i-1)\Delta\tau} \simeq \exp(-r*(T - (t + (i-1)\Delta\tau))) * \frac{1}{2} (S_{t+(i-1)\Delta\tau}\sigma)^2 (1 - X_i) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau$$

Plaçons nous dans le cas où  $r = 0$  et évaluons l'erreur de hedge sur une sous période  $[t, \bar{t}]$ , avec  $t + \bar{n}\Delta\tau = \bar{t} < T$ , sur laquelle on peut considérer que

$$\frac{1}{2} (S_{t+(i-1)\Delta\tau}\sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

est à peu près constant le long de la trajectoire et vaut  $A$  (cette hypothèse n'est pas tenable sur une trop longue période car le gamma est susceptible dévoluer fortement, notamment lorsque l'on se rapproche de la maturité), on a :

$$Y_{\bar{t}} - Y_t \simeq A * \sum_{i=1}^{i=\bar{n}} (1 - X_i) \Delta\tau$$

On obtient alors

$$E^P (Y_{\bar{t}} - Y_t) \simeq A * \left( \sum_{i=1}^{i=\bar{n}} E^P (1 - X_i) \Delta\tau \right) = 0$$

et par indépendance des  $X_i$

$$\begin{aligned} V^P (Y_{\bar{t}} - Y_t) &\simeq A^2 * \left( \sum_{i=1}^{i=\bar{n}} V^P (1 - X_i) (\Delta\tau)^2 \right) \\ &\simeq A^2 (\Delta\tau)^2 \bar{n} * Var(Chi^2) \\ &\simeq A^2 \left( \frac{\bar{t} - t}{\bar{n}} \right)^2 n * Var(Chi^2) \\ &\simeq \frac{A^2 (\bar{t} - t)^2 Var(Chi^2)}{\bar{n}} \end{aligned}$$

enfin si l'on remarque que  $Y_t = \Pi_t = 0$  et que  $Y_{\bar{t}} = \Pi_{\bar{t}}$  on peut conclure que :

$$E^P (\Pi_{\bar{t}} - \Pi_t) \simeq 0$$

et

$$V^P (\Pi_{\bar{t}} - \Pi_t) \simeq \frac{A^2 (\bar{t} - t)^2 \text{Var}(Chi^2)}{n}$$

Ces deux dernières équations nous permettent de conclure que  $\Pi$  s'écarte au fil du temps de sa valeur initiale 0 mais que cet écart tend vers 0 avec l'augmentation vers l'infini du nombre de rebalancements entre  $t$  et  $\bar{t}$ .

## 5 Formule BS pour un sous-jacent versant des dividendes

### 5.1 Actions

Nous allons désormais nous placer dans le cas où le sous-jacent, une action, verse des dividendes. Nous allons considérer pour simplifier que ces dividendes sont connus et qu'ils peuvent être représentés par un taux de rendement instantané  $\delta$ . Autrement dit une action de valeur  $S_\tau$  entre  $\tau$  et  $\tau + d\tau$  rapporte

$$\delta S_\tau d\tau$$

à son détenteur. Notre objectif est de calculer la valeur d'une option sur cet actif. Nous nous plaçons toujours dans la situation d'un trader qui achète une option sur action. Le trader construit un portefeuille contenant l'option, des actions et leur financement au taux sans risque. Pour établir l'équation BS nous allons procéder en adoptant une démarche de trading : nous allons chercher l'edp BS que doit suivre le prix de l'option pour que le portefeuille global soit de valeur nulle à tout temps  $\tau$ .

La détention d'action versant des dividendes implique que la stratégie de couverture n'est plus autofinçante mais intègre la réception de ces dividendes : lorsque le trader "se réhedg" il peut compter sur l'apport des dividendes perçus. L'équation suivie par  $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$  n'est plus (6) mais devient :

$$\alpha_\tau M_\tau + \beta_\tau S_\tau = \alpha_t M_t + \beta_t S_t + \int_t^\tau \alpha_s dM_s + \int_t^\tau \beta_s dS_s + \underbrace{\int_t^\tau \delta \beta_s S_s ds}_{\text{dividendes perçus durant la période}} \quad (23)$$

ou encore sous une forme plus concise:

$$d(\alpha_s M_s + \beta_s S_s) = \alpha_s dM_s + \beta_s dS_s + \delta \beta_s S_s ds \quad (24)$$

On note  $\Pi_\tau$  la valeur du portefeuille en  $\tau$  et l'on se place ici dans le cas d'un trader ayant acheté l'actif dérivé.

En  $\tau$  on a:

$$\Pi_\tau = C_\tau + \alpha_\tau M_\tau + \beta_\tau S_\tau = 0$$

En appliquant (23) et Ito  $\Delta\Pi_\tau$  s'écrit désormais :

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_\tau = & \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau \\ & + \alpha_\tau r M_\tau \Delta\tau + \beta_\tau \Delta S_\tau + \delta \beta_\tau S_\tau \Delta\tau \end{aligned}$$

on a toujours

$$\alpha_\tau M_\tau = -(C_\tau + \beta_\tau S_\tau)$$

et donc

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_\tau = & \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta\tau + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S_\tau \\ & - r \Delta\tau (C_\tau + \beta_\tau S_\tau) + \beta_\tau \Delta S_\tau + \delta \beta_\tau S_\tau \Delta\tau \end{aligned} \quad (25)$$

Pour neutraliser son portefeuille aux chocs  $\Delta S_\tau$  le trader choisit toujours :

$$\beta_\tau = -\frac{\partial C_\tau}{\partial S}$$

L'équation (25) devient alors :

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_\tau = & \frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2} (S_\tau \sigma)^2 \frac{\partial^2 C_\tau}{\partial S^2} \Delta\tau - \\ & r \Delta\tau \left( C_\tau - \frac{\partial C_\tau}{\partial S} S_\tau \right) - \delta \frac{\partial C_\tau}{\partial S} S_\tau \Delta\tau \end{aligned}$$

l'edp que doit suivre le prix de l'option est donc :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (S\sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC_\tau + (r - \delta) \frac{\partial C}{\partial S} S = 0 \quad (26)$$

### 5.1.1 Résolution de l'EDP de valorisation d'un call sur action

**Enoncé du TD** En effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} X &= S * \exp^{-\delta(T-\tau)} \\ \tau &= \tau \end{cases}$$

résoudre l'edp (26) avec la condition limite :

$$C(S, T) = (S - K)^+ \quad (27)$$

Montrer alors que le prix d'un call sur actions versant des dividendes est donné par :

$$C(S_t, t) = E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ / F_t \right]$$

avec sous Q :

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = (r - \delta) d\tau + \sigma dW^Q$$

**Solution** On définit la fonction F par :

$$F(X, \tau) = C(S, \tau)$$

on a donc :

$$C(S, \tau) = F(X, \tau) = F(X(S, \tau), \tau)$$

Réécrivons le système formé par l'edp (26) et la condition terminale (27) en fonction de F et X.

On a :

- $\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = \delta X \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial \tau}$
- $\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} = \exp^{-\delta(T-\tau)} \frac{\partial F}{\partial X} + 0$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \left( \exp^{-\delta(T-\tau)} \frac{\partial F}{\partial X} \right)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial \left( \exp^{-\delta(T-\tau)} \frac{\partial F}{\partial X} \right)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} = \exp^{-2\delta(T-\tau)} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}$

et

- $C(S, T) = F(X, T) = (X - K)^+$

L'edp (26) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (S\sigma)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC_\tau &= \delta X \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (X\sigma \exp^{\delta(T-\tau)})^2 * \exp^{-2\delta(T-\tau)} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \\ &\quad + (r - \delta) \exp^{-\delta(T-\tau)} \frac{\partial F}{\partial X} X \exp^{\delta(T-\tau)} \\ &= \delta X \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (X\sigma)^2 * \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + (r - \delta) \frac{\partial F}{\partial X} X \\ &= \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (X\sigma)^2 * \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + r \frac{\partial F}{\partial X} X \\ &= 0 \end{aligned}$$

et la condition terminale étant donné par :

$$F(X, T) = (X - K)^+$$

On reconnaît l'edp BS classique. On a donc :

$$F(X_t, t) = E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} (X_T - K)^+ / F_t \right]$$

avec sous Q :

$$\frac{dX_\tau}{X_\tau} = r d\tau + \sigma dW^Q$$

ou encore en effectuant un changement de variable :

$$C(S_t, t) = E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ / F_t \right]$$

avec, en appliquant Ito, sous Q

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = (r - \delta) d\tau + \sigma dW^Q$$

## 5.2 Change

Si nous avons placé cette section sur la valorisation des options de change dans le chapitre des options sur sous-jacent versant des dividendes, c'est parce que les analogies sont très fortes entre les options sur actions et les options de change. Plaçons nous dans le cas d'options d'achat/vente de dollar en euro. Le sous-jacent de l'option est le dollar et le prix en euro d'un dollar sera noté  $X_\tau$ . Pour se couvrir ces opérations les traders achètent ou vendent des dollars et les placent sur l'actif sans risque de l'économie américaine. Si l'on note  $r^e$  le taux court rémunérant le placement sans risque de l'économie américaine, on peut écrire que la détention d'un dollar entre  $\tau$  et  $\tau + d\tau$  rapporte, exprimé en devise domestique:

$$r^e X_\tau d\tau$$

Economiquement on peut considérer que les dollars sont des titres de propriété sur l'économie américaine, et donc en quelque sorte des actions sur cette économie, et qu'à ce titre il verse des dividendes au taux  $r^e$ . A partir de ce point, la gestion du portefeuille de trading est strictement équivalente à celle décrite dans la section précédente. On a donc pour le prix d'un call sur dollar :

$$C = E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} (X_T - K)^+ / F_t \right]$$

avec sous Q:

$$\frac{dX_\tau}{X_\tau} = (r - r^e) d\tau + \sigma dW^Q$$

et donc

$$C(t, T, r, r^e, X, K, \sigma) = X \exp^{-r^e(T-t)} N(d_1) - \exp^{-r(T-t)} KN(d_2)$$

avec

- $X$  la valeur du taux de change en  $t$

- $d_1 = \frac{\ln(X/K) + \left(r - r^e + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(X/K) + \left(r - r^e - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

La formule peut aussi s'écrire en fonction du taux de change forward

$$X_t^T = X * \frac{\exp^{-r^e(T-t)}}{\exp^{-r(T-t)}}$$

$$C(t, T, r, r^e, X_t^T, K, \sigma) = \exp^{-r(T-t)} [X_t^T N(d_1) - KN(d_2)]$$

## 6 Théorème de valorisation dans le cas multidimensionnel et avec coefficients de diffusion stochastiques

Soit un marché composé de  $d+1$  actifs.

- un actif sans risque dont la diffusion sous la probabilité historique  $P$  est donnée par

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r_\tau d\tau$$

- $d$  actifs risqués qui sous  $P$  ont la diffusion suivante :

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = \mu_\tau^i d\tau + \sum_{j=1}^d \sigma_\tau^{i,j} dW_j^P$$

ou avec des notations vectorielles

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = \mu_\tau^i d\tau + \sigma_\tau^{iTr} \cdot d\vec{W}^P$$

avec  $W = (W_1^P, \dots, W_j^P, \dots, W_d^P)$  brownien  $d$ -dimensionnel. On note  $F_\tau$  la filtration naturelle associée à  $W$ . On suppose par ailleurs que

- $r, \mu$  et  $\sigma$  sont mesurables,  $F_\tau$ -adaptés, uniformément bornés sur  $[t, T] * \Omega$ ;  $r$  est positif.
- La matrice  $\sigma_\tau$  est inversible, son inverse est borné pour tout  $\tau \in [t, T]$ ,  $\sigma_\tau$  est prévisible.
- une stratégie autofinçante est le  $d+1$ -uplet  $(\pi^i)_{0 \leq i \leq d} = (\pi^0, (\pi^i)_{1 \leq i \leq d})$  de processus  $F_\tau$  adaptés et tels que si l'on note  $\vec{\pi}_\tau$  le vecteur formé des  $d$  dernières coordonnées de  $\vec{\pi}_\tau$  et  $X_\tau = \pi^0 M_\tau + \vec{\pi}_\tau^{Tr} \cdot \vec{S}_\tau$  la valeur en  $\tau$  de la stratégie on ait

$$dX_\tau = \pi_\tau^0 dM_\tau + \vec{\pi}_\tau^{Tr} \cdot d\vec{S}_\tau$$

## 6.1 Théorème

Dans le marché tel que définit précédemment on demontre que :

- $\exists$  probabilité  $Q$  équivalente à  $P$  telle

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = r_\tau d\tau + \sum_{j=1}^d \sigma_\tau^{i,j} dW_j^Q$$

soit avec des notations vectorielles

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = r_\tau d\tau + \vec{\sigma}_\tau^i \cdot \overrightarrow{dW}^Q$$

- quelque soit  $Z$  variable  $F_T$ -mesurable et telle que  $E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} Z / F_t \right]$  alors il existe une stratégie autofinçante fondée sur les actifs de base (actif sans risque et les  $d$  actifs risqués) qui finance  $Z$
- et dont la valeur pour tout  $\tau \in [t, T]$  est donnée par:

$$C_\tau = E^Q \left[ \exp^{-\int_\tau^T r_s ds} Z / F_\tau \right]$$

- la diffusion de  $C_\tau$  sous  $P$  peut s'écrire

$$\frac{dC_\tau}{C_\tau} = \mu_\tau^C d\tau + \vec{\sigma}_\tau^C \cdot \overrightarrow{dW}^P$$

avec  $\mu_\tau^C = r_\tau + \vec{\sigma}_\tau^C \cdot \vec{\lambda}_\tau$  avec  $\vec{\lambda}_\tau$  vecteur de prime de risque indépendant de l'actif  $C$ .

### 6.1.1 Démonstration

- on pose  $\vec{\lambda}_\tau = \sigma_\tau^{-1} \cdot [\vec{\mu}_\tau - r_\tau \vec{1}]$ . Les hypothèses faites sur  $\sigma_\tau$ ,  $\vec{\mu}_\tau$  et  $r_\tau$  impliquent que  $\vec{\lambda}_\tau$  est borné. On peut alors appliquer le théorème de Girsanov multidimensionnel qui montre qu'il existe probabilité  $Q$  équivalente à  $P$  sous laquelle on a :

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = r_\tau d\tau + \sum_{j=1}^d \sigma_\tau^{i,j} dW_j^Q$$

avec  $(dW_j^Q)_j$  brownien sous  $Q$ .

- sous cette probabilité  $Q$  les stratégies autofinçantes vérifient :

$$\begin{aligned}
dX_\tau &= \pi_\tau^0 dM_\tau + \vec{\pi}_\tau^{Tr} \cdot d\vec{S}_\tau \\
&= \pi_\tau^0 dM_\tau + \sum_{i=1}^{i=d} \pi_\tau^i * dS_\tau^i \\
&= \pi_\tau^0 r_\tau M_\tau d\tau + \sum_{i=1}^{i=d} \pi_\tau^i S_\tau^i r_\tau d\tau + \sum_{i=1}^{i=d} \pi_\tau^i S_\tau^i \left[ \sum_{j=1}^d \sigma_\tau^{i,j} dW_j^Q \right] \\
&= X_\tau r_\tau d\tau + \vec{\theta}_\tau^{Tr} \cdot [\sigma_\tau \cdot d\vec{W}^Q]
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{\theta} = \begin{cases} \pi^1 * S^1 \\ \pi^2 * S^2 \\ \dots \\ \pi^{d-1} * S^{d-1} \\ \pi^d * S^d \end{cases}$$

puis en posant

$$R_\tau = \exp^{-\int_t^\tau r_s ds} (= \frac{1}{M_\tau})$$

on obtient :

$$d(X_\tau R_\tau) = R(\tau) \vec{\theta}_\tau^{Tr} \cdot [\sigma_\tau \cdot d\vec{W}^Q]$$

soit encore :

$$X_\tau R_\tau = X_t R_t + \int_t^\tau R_s \vec{\theta}_s^{Tr} \cdot [\sigma_s \cdot d\vec{W}_s^Q]$$

- on pose  $N_\tau = E^Q \left[ \exp^{-\int_t^\tau r_s ds} Z / F_\tau \right]$ .  $N_\tau$  est une martingale sous  $Q$ . D'après le théorème de représentation des martingales il existe un processus  $\vec{h}_\tau$  tel que  $N_\tau = N_t + \int_t^\tau \vec{h}_\tau^{Tr} \cdot d\vec{W}^Q$ . En identifiant  $N_\tau$  à  $X_\tau R_\tau$ , on pose :

$$\vec{\theta}_\tau = \frac{[\sigma_\tau^{Tr}]^{-1} \vec{h}_\tau}{R_\tau}$$

et l'on obtient :  $N_\tau = N_t + \int_t^\tau R_s \vec{\theta}_s^{Tr} \cdot [\sigma_s \cdot d\vec{W}_s^Q]$  avec  $N_T = \exp^{-\int_t^T r_s ds} Z$ .

On conclut en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, \dots, d\} \\ \pi_i \\ \text{et} \\ \pi_\tau^0 \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{\theta_i}{S_i} \\ \\ \frac{N_\tau}{R_\tau} - \sum_1^d \pi_i S_i \\ M_\tau \end{array}$$

et en vérifiant que la stratégie obtenue est effectivement autofinancante et que sa valeur est  $X_\tau$  avec

$$X_\tau = E^Q \left[ \exp^{-\int_t^\tau r_s ds} Z / F_\tau \right]$$

### 6.1.2 rappel

Le théorème de représentation des martingales qui a été utilisé ici est une extension du théorème classique. Nous rappellerons ici l'énoncé de cette extension (Cf Marchés Financiers en temps continu, Rose-Anne Dana et Monique Jeanblanc, p153)

Soit  $(B_s)_{t \geq 0}$  un P-mouvement brownien, soit  $F_t = \sigma(B_s, s \leq t)$  sa filtration. Soit  $L_t$  une densité de Girsanov s'écrivant

$$L_t = \exp \left( \int_0^t h(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds \right)$$

avec  $h$  bornée. On sait que  $\widetilde{B}_s = B_s - \int_0^s h(s) ds$  est un Q-mouvement brownien. En général, la filtration  $\widetilde{F}_t = \sigma(\widetilde{B}_s, s \leq t)$  n'est pas égale à  $F_t$ . Cependant on peut montrer que le théorème de représentation prévisible des martingales est encore vérifié sous Q:

Toute  $Q - F_t$  martingale continue s'écrit  $\int_0^t \phi(s) d\widetilde{B}_s$ , où  $\phi$  est un processus prévisible satisfaisant :

$$\int_0^t \phi^2(s) ds < +\infty \text{ P - p.s. (ou P - p.s.)}$$

## 6.2 Formule BS avec taux d'intérêt stochastique

On se place à nouveau dans la configuration d'un call sur un actif ne versant pas de dividendes. Nous allons calculer la formule BS lorsque le taux court est stochastique. Supposons que dans notre monde multidimensionnel nous avons l'actif sans risque  $M$ , l'actif risqué et le zéro-coupon maturant en  $T$ . D'après le théorème de valorisation précédent nous avons

$$C_t = E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right] \quad (28)$$

Avec sous Q:

$$\begin{aligned} \frac{dS_\tau}{S_\tau} &= r_\tau d\tau + \vec{\sigma}_S \overrightarrow{dW}^Q \\ \frac{dB_\tau}{B_\tau} &= r_\tau d\tau + \vec{\sigma}_B \overrightarrow{dW}^Q \\ \frac{dM_\tau}{M_\tau} &= r_\tau d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

avec donc, cette fois,  $r_\tau$  stochastique.

Notons  $\beta_\tau = \exp^{\int_0^\tau r_s ds}$ . En appliquant Ito on montre facilement que:

$$\frac{d\frac{S_\tau}{\beta_\tau}}{\frac{S_\tau}{\beta_\tau}} = \vec{\sigma}_S \overrightarrow{dW}^Q$$

$$\frac{d\frac{B_\tau}{\beta_\tau}}{\frac{B_\tau}{\beta_\tau}} = \vec{\sigma}_B \vec{dW}^Q \quad (30)$$

Posons maintenant :

$$L_\tau = \frac{B_\tau}{\beta_\tau} \frac{1}{B_0}$$

(30) implique que  $L_\tau$  est une martingale sous  $Q$  strictement positive. Par ailleurs  $L_0 = E^Q(L_T/F_0) = 1$ .  $L_T$  peut donc s'interpréter comme une densité de Radon Nycodym  $\frac{dQ^T}{dQ}$  caractérisant une probabilité  $Q^T$  dite probabilité forward neutre associée à la maturité  $T$ . Par ailleurs on remarque que :

$$\frac{dL_\tau}{L_\tau} = \frac{d\frac{B_\tau}{\beta_\tau}}{\frac{B_\tau}{\beta_\tau}} = \vec{\sigma}_B \vec{dW}^Q$$

et donc

$$L_\tau = \exp \left[ \int_0^\tau \vec{\sigma}_B \vec{dW}^Q - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\vec{\sigma}_B\|^2 ds \right]$$

Ainsi en appliquant le théorème de Girsanov on a

$$d\vec{W}_\tau^{Q^T} = d\vec{W}_\tau^Q - \vec{\sigma}_B d\tau$$

avec  $d\vec{W}_\tau^{Q^T}$  brownien sous  $Q^T$ .  $L_\tau$  s'écrit également en fonction de  $d\vec{W}_\tau^{Q^T}$

$$L_\tau = \exp \left[ \int_0^\tau \vec{\sigma}_B d\vec{W}_\tau^{Q^T} + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\vec{\sigma}_B\|^2 ds \right]$$

Montrons maintenant que  $\frac{S_\tau}{B_\tau}$  et  $\frac{\beta_\tau}{B_\tau}$  ainsi que  $\frac{M_\tau}{B_\tau}$  sont martingales sous  $Q^T$  :

$$\begin{aligned} E^{Q^T} \left( \frac{S_\tau}{B_\tau} / F_s \right) &= \frac{E^Q \left( \frac{dQ^T}{dQ} \frac{S_\tau}{B_\tau} / F_s \right)}{E^Q \left( \frac{dQ^T}{dQ} / F_s \right)} \\ &= \frac{E^Q \left( \frac{B_\tau}{\beta_\tau} \frac{1}{B_0} \frac{S_\tau}{B_\tau} / F_s \right)}{E^Q \left( \frac{B_\tau}{\beta_\tau} \frac{1}{B_0} / F_s \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{B_0} E^Q \left( \frac{S_\tau}{\beta_\tau} / F_s \right)}{\frac{1}{B_0} E^Q \left( \frac{B_\tau}{\beta_\tau} / F_s \right)} \\ &= \frac{S_s}{B_\tau} \end{aligned}$$

Un calcul similaire nous montre que  $\frac{\beta_\tau}{B_\tau}$  ainsi que  $\frac{M_\tau}{B_\tau}$  sont également martingales sous  $Q^T$ . On en déduit alors rapidement :

$$\frac{d\frac{S_\tau}{B_\tau}}{\frac{S_\tau}{B_\tau}} = [\vec{\sigma}_S - \vec{\sigma}_B] d\vec{W}^{Q^T} \quad (31)$$

ainsi que

$$\frac{d\frac{\beta_\tau}{B_\tau}}{\frac{\beta_\tau}{B_\tau}} = -\vec{\sigma}_B d\vec{W}^{Q^T} \quad (32)$$

Reformulons notre équation de valorisation (28)

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right] \\ &= \frac{E^{Q^T} \left[ \frac{dQ}{dQ^T} \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right]}{E^{Q^T} \left[ \frac{dQ}{dQ^T} / F_t \right]} \end{aligned}$$

Calculons les deux termes de ce ratio. Au numérateur :

$$\begin{aligned} &E^{Q^T} \left[ \frac{dQ}{dQ^T} \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right] \\ &= E^{Q^T} \left[ \frac{1}{L_T} \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right] \\ &= E^{Q^T} \left[ \frac{1}{\frac{B_T}{\beta_T} \frac{1}{B_0}} \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right] \\ &= B_0 E^{Q^T} \left[ (S_T - K)^+ / F_t \right] \end{aligned}$$

en remarquant que  $B_T = 1$ . Au dénominateur :

$$\begin{aligned} &E^{Q^T} \left[ \frac{dQ}{dQ^T} / F_t \right] \\ &= E^{Q^T} \left[ \frac{1}{L_T} / F_t \right] \\ &= E^{Q^T} \left[ \frac{1}{\frac{B_T}{\beta_T} \frac{1}{B_0}} / F_t \right] \\ &= B_0 E^{Q^T} \left[ \frac{\beta_T}{B_T} / F_t \right] \end{aligned}$$

d'après l'équation (32)

$$E^{Q^T} \left[ \frac{\beta_T}{B_T} / F_t \right] = \frac{\beta_t}{B_t}$$

d'où

$$\begin{aligned} E^{Q^T} \left[ \frac{dQ}{dQ^T} / F_t \right] \\ = \frac{\beta_t}{B_t} * B_0 \end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / F_t \right] \\ &= B_t E^{Q^T} \left[ (S_T - K)^+ / F_t \right] \\ &= B_t E^{Q^T} \left[ \left( \frac{S_T}{B_T} - K \right)^+ / F_t \right] \end{aligned} \quad (33)$$

que l'on peut résoudre avec la connaissance de la diffusion de  $\frac{S_\tau}{B_\tau}$  sous  $Q^T$  qui nous est justement donnée par (31) . Si l'on suppose que  $\vec{\sigma}_S - \vec{\sigma}_B$  n'est pas stochastique on obtient

$$C_t = B_t \left[ \frac{S_t}{B_t} N(d_1) - K N(d_2) \right]$$

avec

- $d_1 = \frac{\ln \left( \frac{S_t}{B_t} / K \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$
- $\sigma = \|\vec{\sigma}_S - \vec{\sigma}_B\|$

Soit si l'on pose  $S_\tau^T = \frac{S_\tau}{B_\tau}$

$$C_t = B_t \left[ S_t^T N(d_1) - K N(d_2) \right]$$

avec

- $d_1 = \frac{\ln \left( S_t^T / K \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$

Figure 33: Flux induits en T par un contrat de vente forward en cash settlement



Cette formule est à rapprocher de la formule de valorisation BS exprimée en fonction du prix forward de l'actif que nous avons établi dans le cadre des taux non stochastiques (cf equation 13). Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que dans le cadre du modèle BS à taux d'intérêt stochastique  $S_t^T = \frac{S_t}{B_t}$  est effectivement le prix forward en  $t$  de l'actif  $S$  pour un contrat forward maturant en  $T$ .

### 6.3 Prix forward d'un actif

Le prix forward en  $t$  d'un actif pour un contrat forward maturant en  $T$  est tel que le prix en  $t$  des flux en  $T$  induits (cf figure 33) par le contrat forward est 0. Soit, en notant  $P^f$  ce prix forward :

$$E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} P^f / F_t \right] = E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} S_T / F_t \right]$$

Or d'après le théorème de valorisation de la section 6.1

$$\begin{aligned} E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} P^f / F_t \right] &= P^f E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} / F_t \right] \\ &= P^f E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} B(T, T) / F_t \right] \\ &= P^f B(t, T) \end{aligned}$$

et

$$E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} S_T / F_t \right] = S_t$$

En conclusion:

$$P^f = \frac{S_t}{B(t, T)}$$

où  $B(t, T)$  est le prix en  $t$  du zéro-coupon maturant en  $T$ .

## Part III

# Modèle de smile

La présence de smile sur les marchés des taux, des actions et du change ont poussé les opérateurs à trouver des processus de diffusion des sous-jacents qui leur permettent d'expliquer le phénomène de smile. L'objectif est double : il s'agit de pouvoir donner un prix à des payoffs où la réplication statique n'est pas envisageable mais aussi de mieux se couvrir. Nous allons étudier 3 modèles à smile : le modèle log-décalé, qui comme on le verra peut s'interpréter comme une combinaison linéaire d'un modèle normal et d'un modèle log-normal, le modèle 'Dupire' à volatilité locale dépendant du temps et du niveau du sous-jacent et enfin le modèle SABR où la vol dépend du sous-jacent mais également d'un paramètre stochastique non corrélé avec le sous-jacent.

Pour un approfondissement la lecture des articles suivants est recommandée:

- A theory of Volatility, Antoine Savine
- Towards a Theory of Volatility Trading, Peter Carr, Dilp Madan
- Managing Smile Risk , Patrick S. Hagan, Deep Kumar, Andrew S. Lesniewsky, Diana E. Woodward
- A Risk Neutral Stochastic Volatility Model, Yingzi Zhu, Marco Avellaneda
- Pricing and Hedging with Smile, Bruno Dupire

## 7 Modèle log-décalé

On se place sous la probabilité forward neutre  $Q^T$  associé à la maturité T. Sous cette probabilité le prix forward de l'actif est martingale. La diffusion du sous-jacent s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dS_\tau^T}{S_\tau^T + m} = \sigma dW^{Q^T} \quad (34)$$

avec m paramètre constant.

Soit encore

$$\frac{dS_\tau^T}{S_\tau^T} = \sigma_{loc}(S_\tau^T) dW^{Q^T}$$

avec

$$\sigma_{loc}(S_\tau^T) = \sigma * \frac{S_\tau^T + m}{S_\tau^T}$$

## 7.1 Valorisation d'un call.

On se place dans le cadre du paragraphe 'Formule BS avec taux d'intérêt stochastique' et l'on reprend le calcul de valorisation du call à partir de l'équation (33). On pose

$$L_\tau = S_\tau^T + m$$

On a :

- $L_t = S_t^T + m$
- $L_T = S_T^T + m$
- $\frac{dL_\tau}{L_\tau} = \sigma dW^{Q^T}$
- $C_t = B_t E^{Q^T} \left[ (S_T^T - K)^+ / F_t \right] = B_t E^{Q^T} \left[ (L_T - (K + m))^+ / F_t \right]$

et donc:

$$\begin{aligned} C_t &= B_t [L_t N(d_1) - K N(d_2)] \\ &= B_t \left[ (S_t^T + m) * N(d_1) - K N(d_2) \right] \end{aligned}$$

avec

- $d_1 = \frac{\ln \left( \frac{S_t^T + m}{K + m} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$

### 7.1.1 Lien avec le modèle de taux Ho and Lee

Nous sommes en  $t$ . On cherche à valoriser un cap sur taux  $\theta M$  maturant en  $T$ . On se place dans le cadre 'pre fixing post payment, c'est-à-dire que le payoff du cap fixe en  $T$  mais le payment est effectué en  $T + \theta$ . On note  $C_\tau$  la valeur du cap en  $\tau$ . On a :

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q \left[ \exp^{-\int_t^T r_s ds} * (y_T - K) * B(T, T + \theta) \quad / F_t \right] \\ &= E^Q \left[ \exp^{-\int_t^{T+\theta} r_s ds} * (y_T - K) \quad / F_t \right] \\ &= B(t, T + \theta) E^{Q^{T+\theta}} [(y_T - K) \quad / F_t] \end{aligned}$$

Le taux  $\theta M$  en  $T$  est donné par :

$$\frac{1}{1 + \theta y_T} = B(T, T + \theta)$$

soit  $y_T = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{B(T, T + \theta)} - 1 \right]$

Posons

$$y_\tau^T = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{B(\tau, T)}{B(\tau, T + \theta)} - 1 \right]$$

(il s'agit du taux forward). On a

- $y_\tau^T = y_T$

- $\frac{dy_\tau^T}{1 + \theta y_\tau^T} = \frac{d\left(\frac{B(\tau, T)}{B(\tau, T + \theta)}\right)}{\frac{B(\tau, T)}{B(\tau, T + \theta)}}$

Dans le cadre du modèle Ho and Lee les prix zéro-coupon suivent sous la probabilité risque neutre la diffusion :

$$\frac{dB(\tau, T)}{B(\tau, T)} = r_\tau d\tau + \sigma_{HL} * (T - \tau) dW^Q$$

On montre aisément en utilisant des raisonnements analogues à ceux développés dans le paragraphe 'Formule BS avec taux d'intérêt stochastique' que  $\frac{B(\tau, T)}{B(\tau, T + \theta)}$  est une martingale sous  $Q^{T+\theta}$ . On en déduit que sous  $Q^{T+\theta}$  on a :

$$\frac{d\frac{B(\tau, T)}{B(\tau, T + \theta)}}{\frac{B(\tau, T)}{B(\tau, T + \theta)}} = -\sigma_{HL} * \theta * dW^{Q^{T+\theta}}$$

et donc

$$\frac{dy_\tau^T}{1 + \theta y_\tau^T} = -\sigma_{HL} * \theta * dW^{Q^{T+\theta}}$$

soit encore

$$\frac{dy_\tau^T}{1/\theta + y_\tau^T} = -\sigma_{HL} * \theta^2 * dW^{Q^{T+\theta}}$$

### 7.1.2 Remarques et exemples numériques

**Remarque 1** Une bonne approximation des volatilités implicites est donnée par:

$$\sigma_{BS}(T, K) = \sigma_{loc} \left( \frac{S_t^T + K}{2} \right) * \left[ 1 + \frac{1}{24} * \frac{\sigma_{loc}'' \left( \frac{S_t^T + K}{2} \right)}{\sigma_{loc} \left( \frac{S_t^T + K}{2} \right)} * (S_t^T - K)^2 \right] \quad (35)$$

où pour une date de pricing t

- $\sigma_{BS}(T, K)$  est la volatilité implicite du call de maturité T et de strike K
- $S_t^T$  le forward pour une maturité T du sous jacent vu en t.

**Remarque 2** L'équation de diffusion (34) peut également s'écrire:

$$dS_\tau^T = q\tilde{\sigma}dW^{Q^T} + (1-q)S_\tau^T\tilde{\sigma}dW^{Q^T}$$

avec  $m = q\tilde{\sigma}$  et  $(1-q)\tilde{\sigma} = \sigma$ .

**Exemples numériques** cf figures 34 et 35.

## 8 Modèle à volatilité locale non paramétrique : modèle dit de 'Dupire'

### 8.1 Formule de Tanaka

La formule de Tanaka est une extension du lemme d'Itô que l'on applique aux distributions. Soit  $f(t, x)$  une fonction et X un processus d'Itô qui s'écrit

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

On a :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 dt$$

où  $\frac{\partial f(t, X_t)}{\partial X_t}$  et  $\frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial X_t^2}$  sont à prendre, si nécessaire, au sens des distributions

### 8.2 Application

#### 8.2.1 Equation de Focker-Plank

On prend  $f(t, X_t) = \delta_x(X_t)$  et

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

On obtient :

$$d\delta_x(X_t) = \left[ \delta'_x(X_t) \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \delta''_x(X_t) \sigma_t^2 \right] dt + \delta'_x(X_t) \sigma(t, X_t) dW_t$$

équation à laquelle on applique l'opérateur Espérance :

$$d\varphi_t(x) = \left[ \frac{\partial \varphi_t(x) \mu(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(x) \sigma^2(t, X_t)}{\partial x^2} \right] dt$$

Figure 34: Log décalée : modèle de taux Ho & Lee

S <sub>t</sub>	5%	strike	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%	5,50%	6,00%	6,50%	7,00%	7,50%
T-t	2	prix	1,396%	1,008%	0,675%	0,411%	0,225%	0,109%	0,046%	0,017%	0,005%
discount	0,9	BS implied vol	19,276%	18,088%	17,096%	16,230%	15,473%	14,801%	14,202%	13,665%	13,191%
vol	0,2%	proxy (ATM)				16,20%					
m	4	proxy	19,22%	18,05%	17,06%	16,20%	15,45%	14,79%	14,19%	13,66%	13,17%
volbar	16%										

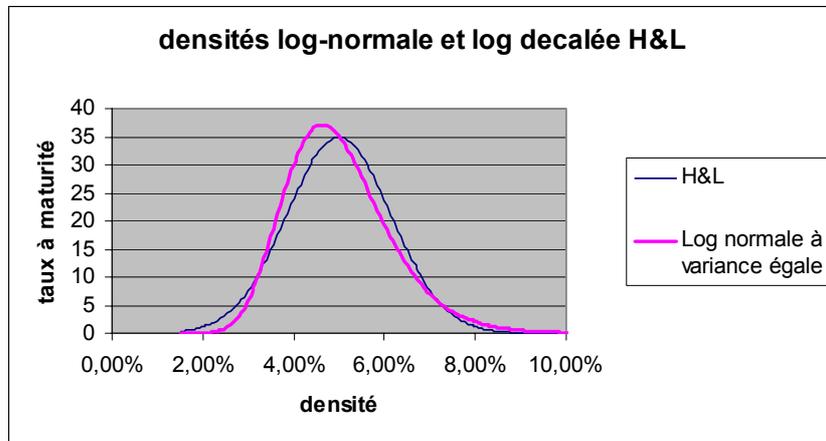
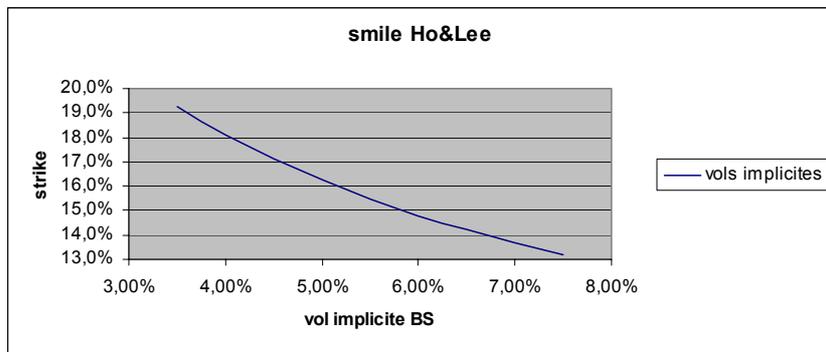
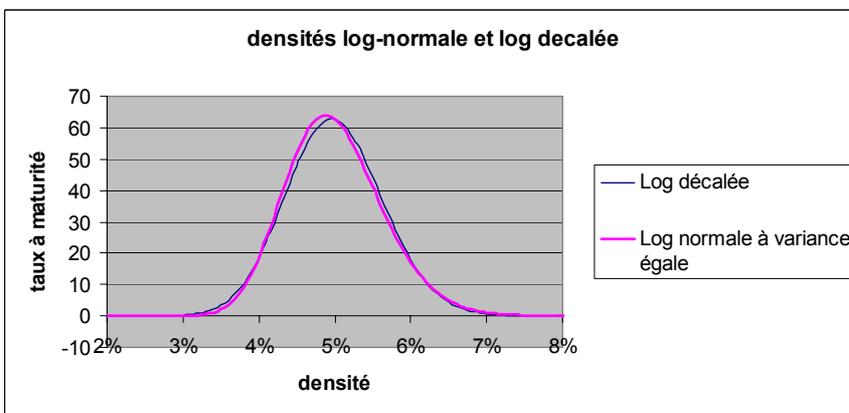
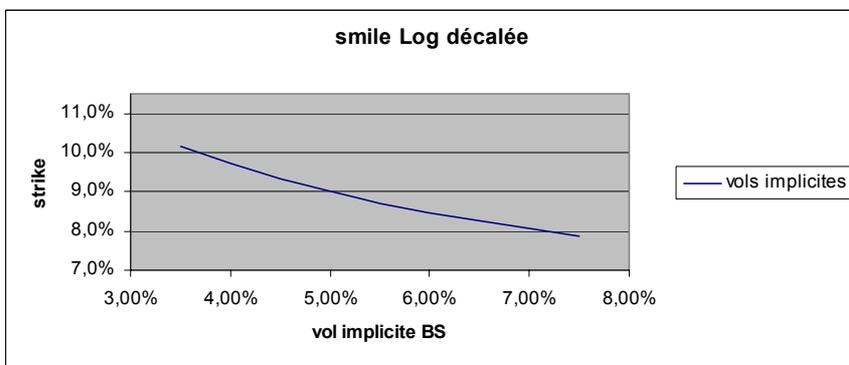


Figure 35: Log décalée

S <sub>t</sub>	5%	strike	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%	5,50%	6,00%	6,50%	7,00%	7,50%
T-t	2	prix	1,351%	0,912%	0,518%	0,228%	0,073%	0,017%	0,003%	0,000%	0,000%
discount	0,9	BS implied vol	10,150%	9,709%	9,324%	8,998%	8,710%	8,462%	8,253%	8,065%	7,876%
vol	3,0%	proxy (ATM)				9,00%					
m	0,1	proxy	10,13%	9,69%	9,32%	9,00%	8,72%	8,47%	8,25%	8,05%	7,86%
volbar	9%										



et donc

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x) = \frac{\partial \varphi_t(x) \mu(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(x) \sigma^2(t, X_t)}{\partial x^2}$$

soit l'équation de Focker-Plank régissant la densité du processus  $X_t$

### 8.2.2 EDP suivi par le prix des calls et équation de la vol locale

On prend  $f(t, X_t) = (X_t - K)^+$  et

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

L'application de la formule de Tanaka nous donne :

$$d(X_t - K)^+ = 1_{\{X_t > K\}}dX_t + \frac{1}{2}\delta_K(X_t)\sigma^2(t, X_t)dt$$

soit, en appliquant l'opérateur espérance :

$$dE(X_t - K)^+ = \frac{1}{2}\varphi_t(K)\sigma^2(t, K)dt$$

On note  $C(t, K)$  le prix au temps 0 d'un call de strike  $K$  maturant en  $t$ . En supposant les taux à zéro on a  $C(t, K) = E(X_t - K)^+$ . L'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial C(t, K)}{\partial t} = \frac{1}{2}\varphi_t(K)\sigma^2(t, K)$$

En utilisant le fait que

$$\varphi_t(K) = \frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2}$$

on obtient :

$$\sigma(t, K) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C(t, K)}{\partial t}}{\frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2}}}$$

## 9 Modèle SABR (Sigma Alpha Beta Rho)

Le modèle SABR propose de ne pas réduire la stochasticité de la volatilité locale à la seule dépendance de cette volatilité au sous jacent et ajoute une source de bruit supplémentaire. Le forward suit la diffusion suivante :

- $dF = F^\beta \sigma_\beta dW^1$
- $d\sigma_\beta = \alpha \sigma_\beta dW^2$
- $\langle dW^1 dW^2 \rangle = \rho$

Figure 36: Smile SABR 1

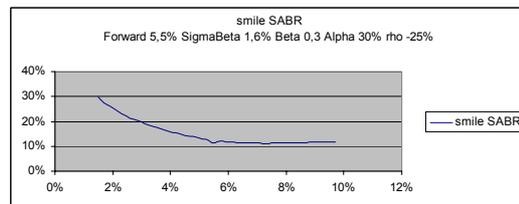
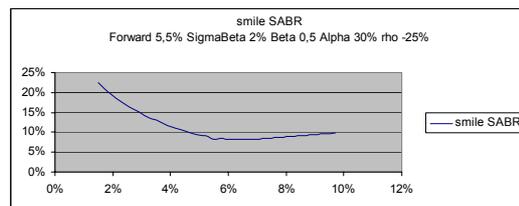
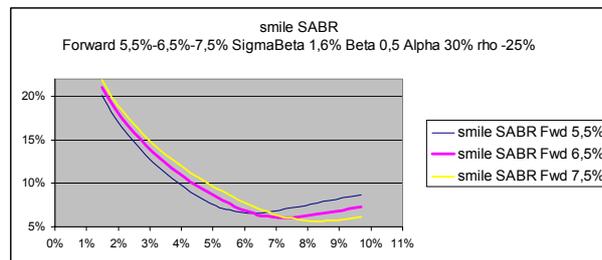
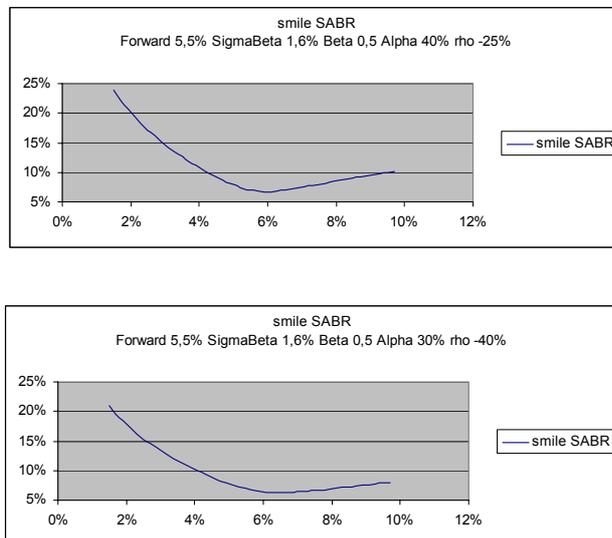


Figure 37: Smile SABR 2



L'impact des paramètres sur la forme des smiles implicites est illustré par les figures 36 et 37.

Une augmentation du paramètre  $\sigma_\beta$  induit une translation du smile vers le haut. Une diminution du paramètre  $\beta$  accroît le 'skew' de même qu'une diminution du paramètre  $\rho$ . Enfin une augmentation du paramètre  $\alpha$ , la volatilité de la volatilité  $\sigma_\beta$  accroît la convexité du smile. L'ajout d'une dimension stochastique pour la volatilité permet donc d'atteindre des smiles convexes qui n'étaient pas accessibles sous des modèles du type 'log-décalé'. Mais ce que permet surtout l'utilisation du SABR c'est un hedge plus compatible avec la dynamique du smile. Comme on peut l'avoir vu en TD à partir d'une analyse simple de la formule (35) pour le modèle log-décalé, l'évolution du forward, à paramètre  $m$  inchangé, fait évoluer le smile d'une façon qui peut être incompatible avec l'évolution réelle du smile de marché et induire un delta hedge moins efficace qu'un delta hedge évalué à partir d'un simple modèle BS.